

(19) 世界知的所有権機関  
国際事務局



(43) 国際公開日  
2005 年 9 月 9 日 (09.09.2005)

PCT

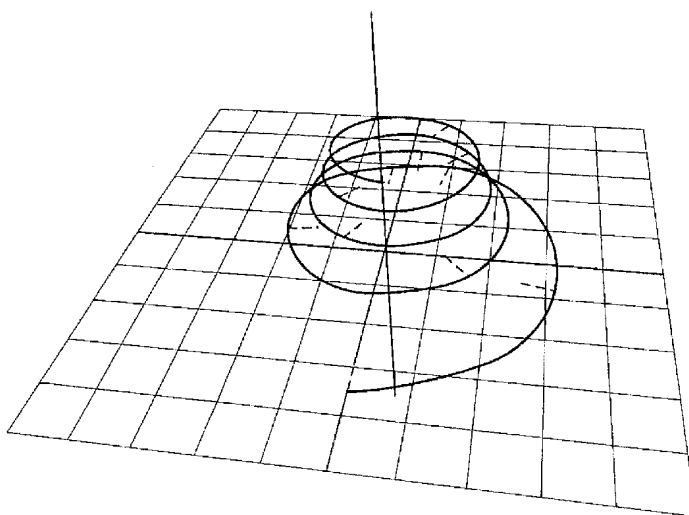
(10) 国際公開番号  
WO 2005/083537 A1

- (51) 国際特許分類: G05B 19/4103 (71) 出願人 (米国を除く全ての指定国について): THK 株式会社 (THK CO.,LTD.) [JP/JP]; 〒1418503 東京都品川区西五反田 3 丁目 1 1 番 6 号 Tokyo (JP).
- (21) 国際出願番号: PCT/JP2005/002132
- (22) 国際出願日: 2005 年 2 月 14 日 (14.02.2005) (72) 発明者; および
- (25) 国際出願の言語: 日本語 (75) 発明者/出願人 (米国についてのみ): 木村文彦 (KIMURA, Fumihiko) [JP/JP]; 〒1138656 東京都文京区本郷 7-3-1 国立大学法人東京大学内 Tokyo (JP). 牧野洋 (MAKINO, Hiroshi) [JP/JP]; 〒4000071 山梨県甲府市羽黒町 1 0 1 3 Yamanashi (JP). 松尾芳一 (MATSUO, Yoshikazu) [JP/JP]; 〒1418503 東京都品川区西五反田 3 丁目 1 1 番 6 号 THK 株式会社内 Tokyo (JP).
- (26) 国際公開の言語: 日本語
- (30) 優先権データ:
- |               |                              |    |
|---------------|------------------------------|----|
| 特願2004-055554 | 2004 年 2 月 27 日 (27.02.2004) | JP |
| 特願2004-055555 | 2004 年 2 月 27 日 (27.02.2004) | JP |
| 特願2004-055556 | 2004 年 2 月 27 日 (27.02.2004) | JP |
| 特願2004-250372 | 2004 年 8 月 30 日 (30.08.2004) | JP |
| 特願2004-250373 | 2004 年 8 月 30 日 (30.08.2004) | JP |
| 特願2004-250374 | 2004 年 8 月 30 日 (30.08.2004) | JP |
| 特願2004-250375 | 2004 年 8 月 30 日 (30.08.2004) | JP |
- (74) 代理人: 塩島 利之 (SHIOJIMA, Toshiyuki); 〒1010032 東京都千代田区岩本町 3 丁目 2-2 マルトモ東京ビル 9 階 Tokyo (JP).

[続葉有]

(54) Title: DESIGN METHOD FOR INDUSTRIAL PRODUCT USING CLOTHOID CURVE, INDUSTRIAL PRODUCT DESIGNED BY THE DESIGN METHOD, AND METHOD AND DEVICE FOR NUMERICAL CONTROL USING THE CLOTHOID CURVE

(54) 発明の名称: クロソイド曲線を用いた工業製品の設計方法及びこの設計方法により設計された工業製品、クロソイド曲線を用いた数値制御方法及び装置



(57) Abstract: A design method for industrial products using a clothoid curve, wherein (A), the route of the motion of a mechanical element is designed by using a three-dimensional curve (called the three-dimensional clothoid curve) in which each of a pitch angle and a yaw angle in tangential direction is given by the quadratic of a curve length or curve length variables and (B), the route of a tool or the profile of a work is expressed by using a three-dimensional curve (called the three-dimensional clothoid curve) in which each of a pitch angle and a yaw angle in tangential direction is given by the quadratic of a curve length or curve length variables, and the motion of the tool is controlled by the three-dimensional curve.

[続葉有]

WO 2005/083537 A1



(81) 指定国 (表示のない限り、全ての種類の国内保護が可能): AE, AG, AL, AM, AT, AU, AZ, BA, BB, BG, BR, BW, BY, BZ, CA, CH, CN, CO, CR, CU, CZ, DE, DK, DM, DZ, EC, EE, EG, ES, FI, GB, GD, GE, GH, GM, HR, HU, ID, IL, IN, IS, KE, KG, KP, KR, KZ, LC, LK, LR, LS, LT, LU, LV, MA, MD, MG, MK, MN, MW, MX, MZ, NA, NI, NO, NZ, OM, PG, PH, PL, PT, RO, RU, SC, SD, SE, SG, SK, SL, SM, SY, TJ, TM, TN, TR, TT, TZ, UA, UG, US, UZ, VC, VN, YU, ZA, ZM, ZW.

BY, KG, KZ, MD, RU, TJ, TM), ヨーロッパ (AT, BE, BG, CH, CY, CZ, DE, DK, EE, ES, FI, FR, GB, GR, HU, IE, IS, IT, LT, LU, MC, NL, PL, PT, RO, SE, SI, SK, TR), OAPI (BF, BJ, CF, CG, CI, CM, GA, GN, GQ, GW, ML, MR, NE, SN, TD, TG).

添付公開書類:  
— 国際調査報告書

(84) 指定国 (表示のない限り、全ての種類の広域保護が可能): ARIPO (BW, GH, GM, KE, LS, MW, MZ, NA, SD, SL, SZ, TZ, UG, ZM, ZW), ユーラシア (AM, AZ,

2文字コード及び他の略語については、定期発行される各PCTガゼットの巻頭に掲載されている「コードと略語のガイダンスノート」を参照。

(57) 要約: A. 接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる3次元曲線 (3次元クロソイド曲線という) を用いて、機械要素の運動の軌道を設計する。 B. 接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる3次元曲線 (3次元クロソイド曲線という) を用いて、工具軌跡またはワークの輪郭形状を表現し、この3次元曲線によって工具の運動を制御する。

## 明 細 書

クロソイド曲線を用いた工業製品の設計方法及びこの設計方法により設計された工業製品、クロソイド曲線を用いた数値制御方法及び装置  
技術分野

[0001] 以下の明細書では、「クロソイド曲線を用いた工業製品の設計方法及びこの設計方法により設計された工業製品」（以下、単にクロソイド曲線を用いた工業製品の設計方法という）に関する説明にAを付記し、「クロソイド曲線を用いた数値制御方法及び装置」（以下、単にクロソイド曲線を用いた数値制御方法という）に関する説明にBを付記する。

[0002] A. クロソイド曲線を用いた工業製品の設計方法

本発明は、クロソイド曲線を用いた工業製品の形状の設計方法に関し、特に質量を有する機械要素が運動する機構を含む機械において、その機械要素の運動を滑らかにする運動の軌道を設計する方法に関する。

[0003] B. クロソイド曲線を用いた数値制御方法

また本発明は、クロソイド曲線を用いて、ロボット、工作機械、組立機械、検査機械などの作業機械（ロボット等という）における工具（ハンド等の把持部や各種のツールを含む）の運動を制御する数値制御方法及び装置に関し、特に工具の3次元的な運動を制御する数値制御方法及び装置に関する。

### 背景技術

[0004] A. クロソイド曲線を用いた工業製品の設計方法

機械の小型化・高精度化に伴い、機械要素が高速に運動する機構が重要になってきている。力学的に無理がない滑らかな運動軌跡を設計して、振動や運動誤差が少なく、経年変化や損傷を抑えて、高速・高精度な運動を実現することへの要求は強い。

[0005] 自由な運動軌跡の設計方法については、従来から直線や円弧などの解析的な曲線を接続する方法や、スプライン曲線補間（与えられた点列をスプライン曲線で補間する方法）が用いられていた（非特許文献1参照）。

[0006] B. クロソイド曲線を用いた数値制御方法

溶接、塗装、接着剤塗布などの数値制御を行うロボットにおいては、一般に入力図形は離散的な点列データとして入力される。したがって、連続的な図形を生成するには、なんらかの方法を用いて点列を補間する必要がある。

[0007] 任意に与えられた点列間を補間する方法としては、折れ線の角部を丸める方法やBスプライン補間、3次式スプライン補間などが知られているが、与えられた各点を厳密に通る補間法としては、3次式スプライン補間が知られている（非特許文献1参照）。

[0008] しかし、3次式スプライン補間は、幾何学的意味を持たない独立変数を媒介変数として表現されているため、独立変数と曲線の幾何学的諸量との関係が不定である、という大きな欠点を持っている。この3次式スプライン補間は、始点からの移動距離と曲率の関係が複雑であり、線速度を一定に保つような制御には不向きである。

[0009] 非特許文献1：穂坂衛・佐田登志夫著，“統合化CAD/CAMシステム” オーム社、1997

非特許文献2：仇時雨，牧野洋，須田大春，横山恭男，“クロソイドによる自由曲線補間法”（日本ロボット学会誌8巻6号，pp40-47）

非特許文献3：Li Guiqing, Li Xianmin, Li Hua “3D Discrete Clothoid Splines”，(CGI' 01, pp321-324)

## 発明の開示

### 発明が解決しようとする課題

[0010] A. クロソイド曲線を用いた工業製品の設計方法

直線や円弧などの解析的な曲線を接続する手法では、直線と円弧の接続点で曲率を連続に接続することが困難である。スプライン曲線で補間する手法によれば、曲率連続に接続することは可能であるが、始点からの移動距離と曲率の関係が複雑なので、軌道に沿って力学的に無理のない曲率の分布を設計することが困難であり、良好な運動軌跡が得られない。

[0011] そこで本発明は、質量を有する機械要素が運動する機構を含む機械におい

て、その機械要素の運動を滑らかにする運動の軌道を設計する手法を提供することを目的とする。この手法は本発明者によってもたらされた新しく且つ斬新な手法である。

[0012] ここで滑らかとは、軌道の接線、接触平面（法線）や曲率などの変化が軌道に沿って連続であり、従って軌道上を運動する機械要素に働く力が連続的に変化することを意味する。

[0013] ところでロボット、工作機械、組立機械、検査機械などに多用されるボールねじの回帰経路の形態は、直線や円弧でつないだものであり、曲線の接線や曲率が連続でなく、また軌道設計の自由度も不足であった。

[0014] 本発明の他の目的は、ボールねじのボール循環経路の設計に際して、ボールの循環経路における運動エネルギーの損失を軽減し、また循環経路を与える部品の損傷を防ぐために、循環経路の接線や曲率が連続であり、かつ曲率変化が穏やかである循環経路の設計方法を確立することにある。ボールねじの循環経路の設計方法は、機械要素の運動を滑らかにする運動の軌道を設計する方法の応用例である。

[0015] B. クロソイド曲線を用いた数値制御方法

2次元においては与えられた各点を通る補間方法として、クロソイド補間法が発明者らによって提案され、滑らかに補間できることが知られている（非特許文献2参照）。そこで、クロソイド曲線を3次元に拡張し、自由点列の補間に用いれば、曲線の長さの関数として表されるクロソイド曲線の特徴より、線速度を一定に保ったり、線長に応じて変化させたりするような制御を容易に実現できると思われる。また、曲線長をパラメータとしているため、他の方法と違い、線長を後から求める必要もない利点もあり、クロソイド補間を3次元に拡張することは数値制御などの分野において有益であることが期待される。これまでにクロソイド曲線を3次元に拡張したものとしては、Liらの”3D Discrete Clothoid Splines”（非特許文献3参照）などが知られているが、式の形でクロソイド曲線を3次元に拡張したものは知られていない。式の形での拡張は、各値を容易に算出できる点で優位である。

- [0016] そこで本発明は、工具の運動を数値制御するために、独立変数に対する曲率変化パターンが単純な２次元クロソイド曲線の特性をできるだけ引き継ぐ新たな３次元クロソイド曲線の定義式を提供することを目的とする。また本発明は、この３次元クロソイド曲線によって点列を補間することを目的とする。

#### 課題を解決するための手段

- [0017] A. クロソイド曲線を用いた工業製品の設計方法

以下、請求項１～１０に記載のクロソイド曲線を用いた工業製品の設計方法の発明について説明する。

- [0018] 請求項１の発明は、接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる３次元曲線（３次元クロソイド曲線という）を用いて工業製品の形状を設計することを特徴とする工業製品の設計方法により、上述した課題を解決する。

- [0019] 請求項２の発明は、請求項１に記載の工業製品の設計方法において、前記工業製品は、質量を有する機械要素が運動する機構を含む機械であり、前記３次元曲線（３次元クロソイド曲線という）を用いて前記機械要素の運動の軌道を設計することを特徴とする。

- [0020] 請求項３の発明は、請求項２に記載の工業製品の設計方法において、前記機械は、前記機械要素としてボールが運動する機構を含むねじ装置であり、前記ねじ装置は、外周面に螺旋状の転動体転走溝を有するねじ軸と、内周面に前記転動体転走溝に対向する負荷転動体転走溝を有すると共に前記負荷転動体転走溝の一端と他端を接続する回帰経路を有するナットと、前記ねじ軸の前記転動体転走溝と前記ナットの前記負荷転動体転走溝の間及び回帰経路に配列される複数の転動体と、を備え、前記３次元曲線（３次元クロソイド曲線という）を用いて、前記ねじ装置の前記回帰経路を設計することを特徴とする。

- [0021] 請求項４の発明は、請求項１ないし３いずれかに記載の工業製品の設計方法において、前記３次元クロソイド曲線を以下の式で定義する。

[数1]

$$P = P_0 + \int_0^s u ds = P_0 + h \int_0^S u dS, \quad 0 \leq s \leq h, \quad 0 \leq S = \frac{s}{h} \leq 1 \quad (1)$$

$$u = E^{k\beta} E^{j\alpha} (i) = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\alpha = a_0 + a_1 S + a_2 S^2 \quad (3)$$

$$\beta = b_0 + b_1 S + b_2 S^2 \quad (4)$$

ここで、

[数2]

$$P = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad P_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

はそれぞれ、3次元クロソイド曲線上の点の位置ベクトル、及びその初期値を示す。

始点からの曲線の長さを $s$ とし、その全長（始点から終点までの長さ）を $h$ とする。 $s$ を $h$ で割った値を $S$ で表わす。 $S$ は無次元の値であり、これを曲線長変数と呼ぶ。

$i$ ,  $j$ ,  $k$ はそれぞれ、 $x$ 軸、 $y$ 軸、及び $z$ 軸方向の単位ベクトルである。

$u$ は点 $P$ における曲線の接線方向を示す単位ベクトルであり、式(2)によって与えられる。 $E^{k\beta}$ 及び $E^{j\alpha}$ は回転マトリクスであり、それぞれ、 $k$ 軸まわりの角

度 $\beta$ の回転及び $j$ 軸まわりの角度 $\alpha$ の回転を表わしている。前者をヨー(yaw)回転、後者をピッチ(pitch)回転という。式(2)は、 $i$ 軸方向の単位ベクトルを、まず $j$ 軸まわりに $\alpha$ だけ回し、しかるのちに $k$ 軸まわりに $\beta$ だけ回すことによって、接線ベクトル $u$ が得られることを示している。

$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ は定数。

- [0022] 請求項5の発明は、請求項4に記載の工業製品の設計方法において、3次元座標内に複数の空間点を指定し、これらの空間点を前記3次元クロソイド曲線を用いて補間することによって、前記工業製品の形状を設計することを特徴とする。
- [0023] 請求項6の発明は、請求項5に記載の工業製品の設計方法において、前記複数の空間点において、一つの3次元クロソイド線分（補間によって生成される曲線群を構成する単位曲線）と次の3次元クロソイド線分（補間によって生成される曲線群を構成する単位曲線）とで、両者の位置、接線方向、法線方向及び曲率が連続するように、前記3次元クロソイド線分の7つのパラメータ $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h$ を算出することを特徴とする。
- [0024] 請求項7の発明は、請求項6に記載の工業製品の設計方法において、前記複数の空間点のうちの始点及び終点の接線方向、法線方向及び曲率を指定し、あらかじめ指定された前記空間点の間に新たに補間対象点を挿入することによって、前記始点及び前記終点における接線方向、法線方向及び曲率の条件式と、前記複数の空間点における、一つの3次元クロソイド線分と次の3次元クロソイド線分とで両者の位置、接線方向、法線方向及び曲率を連続させる条件式と、を合算した条件式の数と、前記3次元クロソイド線分の7つのパラメータ $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h$ の未知数と、を一致させ、条件式と未知数との数を一致させることによって、前記3次元クロソイド線分の7つのパラメータ $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h$ を算出することを特徴とする。
- [0025] 請求項8の発明は、請求項1ないし7いずれかの工業製品の設計方法により設計された工業製品である。



- [0026] 請求項 9 の発明は、工業製品の形状を設計するために、コンピュータを、接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる 3 次元曲線（3 次元クロソイド曲線という）を用いて工業製品の形状を設計する手段として機能させるためのプログラムである。
- [0027] 請求項 10 の発明は、工業製品の形状を設計するために、コンピュータを、接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる 3 次元曲線（3 次元クロソイド曲線という）を用いて工業製品の形状を設計する手段として機能させるためのプログラムを記録したコンピュータ読み取り可能な記録媒体である。
- [0028] B. クロソイド曲線を用いた数値制御方法
- 以下、請求項 11 ～ 27 に記載のクロソイド曲線を用いた数値制御方法の発明について説明する。
- [0029] 請求項 11 の発明は、接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる 3 次元曲線（3 次元クロソイド曲線という）を用いて工具軌跡またはワークの輪郭形状を表現し、この 3 次元曲線によって工具の運動を制御する数値制御方法により、上述した課題を解決する。
- [0030] 請求項 12 の発明は、請求項 11 に記載の数値制御方法において、3 次元クロソイドを以下の式で定義する。
- [数3]

$$P = P_0 + \int_0^s u ds = P_0 + h \int_0^S u dS, \quad 0 \leq s \leq h, \quad 0 \leq S = \frac{s}{h} \leq 1$$

(1)

$$u = E^{k\beta} E^{j\alpha} (i) = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{Bmatrix}$$

(2)

$$\alpha = a_0 + a_1 S + a_2 S^2 \quad (3)$$

$$\beta = b_0 + b_1 S + b_2 S^2 \quad (4)$$

ここで、

[数4]

$$P = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad P_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

はそれぞれ、3次元クロソイド曲線上の点の位置ベクトル、及びその初期値を示す。

始点からの曲線の長さを $s$ とし、その全長（始点から終点までの長さ）を $h$ とする。 $s$ を $h$ で割った値を $S$ で表わす。 $S$ は無次元の値であり、これを曲線長変数と呼ぶ。

$i$ ,  $j$ ,  $k$ はそれぞれ、 $x$ 軸、 $y$ 軸、及び $z$ 軸方向の単位ベクトルである。

$u$ は点 $P$ における曲線の接線方向を示す単位ベクトルであり、式(2)によって与えられる。 $E^{k\beta}$ 及び $E^{j\alpha}$ は回転マトリクスであり、それぞれ、 $k$ 軸まわりの角度 $\beta$ の回転及び $j$ 軸まわりの角度 $\alpha$ の回転を表わしている。前者をヨー(yaw)回転、後者をピッチ(pitch)回転という。式(2)は、 $i$ 軸方向の単位ベクトルを、まず $j$ 軸まわりに $\alpha$ だけ回し、しかるのちに $k$ 軸まわりに $\beta$ だけ回すこ

とによって、接線ベクトル  $u$  が得られることを示している。 $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  は定数。

- [0031] 請求項 13 の発明は、接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる 3 次元曲線（3 次元クロソイド曲線という）を用いて工具軌跡またはワークの輪郭形状を表現し、この 3 次元曲線によって工具の運動を制御する数値制御装置である。
- [0032] 請求項 14 の発明は、工具の運動を数値制御するために、コンピュータを、接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる 3 次元曲線（3 次元クロソイド曲線という）を用いて工具軌跡またはワークの輪郭形状を表現する手段として機能させるためのプログラムである。
- [0033] 請求項 15 の発明は、工具の運動を数値制御するために、コンピュータを、接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる 3 次元曲線（3 次元クロソイド曲線という）を用いて工具軌跡またはワークの輪郭形状を表現する手段として機能させるためのプログラム又はそのプログラムによる計算結果を記録したコンピュータ読み取り可能な記録媒体である。
- [0034] 請求項 16 の発明は、3 次元座標内に任意に与えられた点列間を、接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる 3 次元クロソイド曲線（3 次元クロソイドセグメント）を用いて補間し、この 3 次元クロソイドセグメントによって工具の運動を制御する数値制御方法により、上述した課題を解決する。
- [0035] 請求項 17 の発明は、接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる 3 次元クロソイド曲線（3 次元クロソイドセグメント）を複数本接続し、この複数本の 3 次元クロソイドセグメントによって工具の運動を制御する数値制御方法である。
- [0036] 請求項 18 の発明は、請求項 16 又は 17 に記載の数値制御方法において、3 次元クロソイド曲線を以下の式で定義する。

[数5]

$$P = P_0 + \int_0^s u ds = P_0 + h \int_0^S u dS, \quad 0 \leq s \leq h, \quad 0 \leq S = \frac{s}{h} \leq 1 \quad (1)$$

$$u = E^k \beta E^j \alpha (i) = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\alpha = a_0 + a_1 S + a_2 S^2 \quad (3)$$

$$\beta = b_0 + b_1 S + b_2 S^2 \quad (4)$$

ここで、

[数6]

$$P = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad P_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

はそれぞれ、3次元クロソイド曲線上の点の位置ベクトル、及びその初期値を示す。

始点からの曲線の長さを $s$ とし、その全長（始点から終点までの長さ）を $h$ とする。 $s$ を $h$ で割った値を $S$ で表わす。 $S$ は無次元の値であり、これを曲線長変数と呼ぶ。

$i$ ,  $j$ ,  $k$ はそれぞれ、 $x$ 軸、 $y$ 軸、及び $z$ 軸方向の単位ベクトルである。

$u$ は点 $P$ における曲線の接線方向を示す単位ベクトルであり、式(2)によって与えられる。 $E^k \beta$ 及び $E^j \alpha$ は回転マトリクスであり、それぞれ、 $k$ 軸まわりの角度 $\beta$ の回転及び $j$ 軸まわりの角度 $\alpha$ の回転を表わしている。前者をヨー(yaw)回転、後者をピッチ(pitch)回転という。式(2)は、 $i$ 軸方向の単位ベ

クトルを、まず  $j$  軸まわりに  $\alpha$  だけ回し、しかるのちに  $k$  軸まわりに  $\beta$  だけ回すことによって、接線ベクトル  $u$  が得られることを示している。

$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  は定数。

- [0037] 請求項 19 の発明は、請求項 18 に記載の数値制御方法において、一つの 3 次元クロソイドセグメントと次の 3 次元クロソイドセグメントの継ぎ目において、両者の位置、接線方向（及び場合によっては曲率）が連続するように、前記 3 次元クロソイドセグメントの 7 つのパラメータ  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h$  を算出することを特徴とする。位置及び接線方向は必ず連続し、曲率は必要に応じて連続する場合がある。
- [0038] 請求項 20 の発明は、3 次元座標内に任意に与えられた点列間を、接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる 3 次元クロソイドセグメントを用いて補間し、この 3 次元クロソイドセグメントによって工具の運動を制御する数値制御装置である。
- [0039] 請求項 21 の発明は、工具の運動を数値制御するために、コンピュータを、3 次元座標内に任意に与えられた点列間を、接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる 3 次元クロソイドセグメントを用いて補間する手段として機能させるためのプログラムである。
- [0040] 請求項 22 の発明は、工具の運動を数値制御するために、コンピュータを、3 次元座標内に任意に与えられた点列間を、接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる 3 次元クロソイドセグメントを用いて補間する手段として機能させるためのプログラム又はそのプログラムによる計算結果を記録したコンピュータ読み取り可能な記録媒体である。
- [0041] 請求項 23 の発明は、接線方向のピッチ角及びヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる 3 次元曲線（3 次元クロソイド曲線という）を用いて工具軌跡またはワークの輪郭形状を表現し、前記 3 次元曲線に沿って移動する工具の運動を指定し、指定された運動に従って単位時間

毎に工具の移動位置を算出する数値制御方法により、上述した課題を解決する。ここで、運動とは、時間の関数として変化する位置情報をいう。

[0042] 請求項 2 4 の発明は、請求項 2 3 に記載の数値制御方法において、3次元クロソイド曲線を以下の式で定義する。

[数7]

$$P = P_0 + \int_0^s u ds = P_0 + h \int_0^S u dS, \quad 0 \leq s \leq h, \quad 0 \leq S = \frac{s}{h} \leq 1 \quad (1)$$

$$u = E^{k\beta} E^{j\alpha} (i) = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\alpha = a_0 + a_1 S + a_2 S^2 \quad (3)$$

$$\beta = b_0 + b_1 S + b_2 S^2 \quad (4)$$

ここで、

[数8]

$$P = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad P_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

はそれぞれ、3次元クロソイド曲線上の点の位置ベクトル、及びその初期値を示す。

始点からの曲線の長さをsとし、その全長（始点から終点までの長さ）をhとする。sをhで割った値をSで表わす。Sは無次元の値であり、これを曲線長変数と呼ぶ。

i, j, kはそれぞれ、x軸、y軸、及びz軸方向の単位ベクトルである。

$u$ は点Pにおける曲線の接線方向を示す単位ベクトルであり、式(2)によって与えられる。 $E_k \beta$ 及び $E_j \alpha$ は回転マトリクスであり、それぞれ、 $k$ 軸まわりの角度 $\beta$ の回転及び $j$ 軸まわりの角度 $\alpha$ の回転を表わしている。前者をヨー(yaw)回転、後者をピッチ(pitch)回転という。式(2)は、 $i$ 軸方向の単位ベクトルを、まず $j$ 軸まわりに $\alpha$ だけ回し、しかるのちに $k$ 軸まわりに $\beta$ だけ回すことによって、接線ベクトル $u$ が得られることを示している。 $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ は定数。

- [0043] 請求項25の発明は、接線方向のピッチ角及びヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる3次元曲線（3次元クロソイド曲線という）を用いて工具軌跡またはワークの輪郭形状を表現し、前記3次元曲線に沿って移動する工具の運動を指定し、指定された運動に従って単位時間毎に工具の移動位置を算出する数値制御装置である。ここで、運動とは、時間の関数として変化する位置情報をいう。
- [0044] 請求項26の発明は、工具の運動を数値制御するために、コンピュータを、接線方向のピッチ角及びヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる3次元曲線（3次元クロソイド曲線という）を用いて工具軌跡またはワークの輪郭形状を表現する手段と、前記3次元曲線に沿って移動する工具の運動を指定する手段と、指定された運動に従って単位時間毎に工具の移動位置を算出する手段、として機能させるためのプログラムである。ここで、運動とは、時間の関数として変化する位置情報をいう。
- [0045] 請求項27の発明は、工具の運動を数値制御するために、コンピュータを、接線方向のピッチ角及びヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる3次元曲線（3次元クロソイド曲線という）を用いて工具軌跡またはワークの輪郭形状を表現する手段と、前記3次元曲線に沿って移動する工具の運動を指定する手段と、指定された運動に従って単位時間毎に工具の移動位置を算出する手段、として機能させるためのプログラムを記録したコンピュータ読み取り可能な記録媒体である。ここで、運動とは、時間の関数として変化する位置情報をいう。

## 発明の効果

### [0046] A. クロソイド曲線を用いた工業製品の設計方法

請求項 1 ～ 10 に記載の発明によれば、3 次元クロソイド曲線を用いることにより、機械要素の運動を滑らかにする運動の軌道を設計することができる。軌道をこのように設計できれば、力学的に無理のない運動が実現されて、運動誤差による機能低下や軌道損傷が少ない機械が実現できる。

[0047] 特にねじ装置について、転動体の循環経路の設計に際して必要となる空間曲線の汎用的な発生方法を提供することができる。循環経路の空間曲線に沿って転動体が加減速を伴って運動する場合に、拘束力変化が滑らかな設計を可能とする。この特徴により、転動体は穏やかで滑らかな運動を行うので、ねじ装置の動力伝達効率が向上し、過大な摩擦力や慣性力の発生が抑制される。従って部品の損傷を防ぎ、信頼性の高いねじ装置を実現することができる。

[0048] また、曲率変化パターンを制御できるという特徴を活かして、産業分野へ多く応用できる。例えば審美的な意匠が要求される意匠形状設計において、この汎用的な曲線設計法を有効に適用することができる。

### [0049] B. クロソイド曲線を用いた数値制御方法

請求項 11 ～ 27 に記載の発明によれば、曲線の主変数が曲線長または曲線長変数であり、その接線方向のピッチ角及びヨー角がそれぞれ曲線長または曲線長変数の二次式で与えられるので、これを 1 回微分して得られる法線方向、および 2 回微分して得られる曲率が曲線長または曲線長変数に関して連続であることが保証される。言い換えれば、一つのクロソイド曲線の中では法線方向および曲率が連続である。したがって、滑らかで性質の良い曲線が得られ、力学的に無理のない速度変化を実現する数値制御方式が可能となる。

## 図面の簡単な説明

[0050] [図1] x y 座標上の 2 次元クロソイド曲線を示す図。

[図2] 典型的な二次元クロソイド曲線の形状を示す図。



- [図3] 3次元クロソイド曲線のピッチ角 $\alpha$ 、ヨー角 $\beta$ の定義を示す図。
- [図4] 典型的な3次元クロソイド曲線の形状を示す図。
- [図5] 単位法線ベクトルの変化量を示す図。
- [図6] 同じ大きさ、形状で向きが逆な2つの3次元クロソイド曲線を示す図。
- [図7] 3次元クロソイド曲線の分割を示す図。
- [図8]  $G^2$ 連続な補間の条件を示す図。
- [図9] 接触平面の概念を示す図。
- [図10] クロソイド補間の手法の流れの概要を示す図。
- [図11]  $G^2$ 連続となるような条件を満たすクロソイド補間の手法の流れの概要を示す図。
- [図12] 点 $P_1, P_2, P_3$ の3次元クロソイド補間を示す図。
- [図13]  $r=4$ の3D Discrete Clothoid Splinesを示す図。
- [図14] 3D Discrete Clothoid Splinesを説明する図。
- [図15] 補間により生成された3次元クロソイド曲線の透視図。
- [図16] 横軸に始点からの移動距離、縦軸に曲率を取った曲率変化グラフ。
- [図17] 両端点で各値を制御する3次元クロソイド補間の流れの概要を示す図。
- [図18] 両端点で各値を制御する3次元クロソイド補間の概略図
- [図19] 実際に補間を行った結果を示す図。
- [図20] 各曲線の始点からの移動距離と曲率の関係のグラフ。
- [図21] 中間点における値の制御を示す図。
- [図22] 始点・終点で各値を制御する3次元クロソイドを用いた補間法の流れの概要を示す図。
- [図23]  $r=4$ の3D Discrete Clothoid Splinesを示す図。
- [図24] 生成されたポリゴンを示す図。
- [図25] 点 $P_1, P_2, P_3$ の3次元クロソイド補間を示す図。
- [図26] 生成された曲線とポリゴンとを示す図。
- [図27] 点を挿入した図。
- [図28] 分割された3次元クロソイド曲線を示す図。

[図29] 生成された曲線を示す図。

[図30] 各曲線の始点からの移動距離 $s$ と曲率 $\kappa$ の関係を示すグラフ。

[図31] デフレクタがナットと別体のデフレクタータイプのボールねじを示す図。

[図32] デフレクタがナットと一体のボールねじのナットを示す図。

[図33A] ボール循環溝が見える状態のナットの斜視図。

[図33B] 負荷ボール転走溝が見える状態のナットの斜視図。

[図34] ナットをねじ軸に組み合わせた状態を示す図。

[図35] 従来のボールねじの循環経路を示す展開図。

[図36] 従来のボールねじの循環経路の曲率を示すグラフ。

[図37] ボール中心の軌道を示す図。

[図38] 座標系を示す図。

[図39]  $z$ 軸上からみた座標系を示す図。

[図40] ねじ溝を移動するボールの中心の軌跡が描く曲線を示す図。

[図41]  $y$ 軸上から見た曲線 $C_0$ と $C_1$ を示す図。

[図42]  $z$ 軸上から見た点 $P_0$ 近傍の曲線 $C_0$ と $C_1$ を示す図。

[図43] 点 $P_2$ を挿入した図。

[図44] 生成された回帰経路と曲線 $C_0$ を示す図。

[図45] 点 $P_0$ から移動距離と曲率の関係を示す図。

[図46]  $x$ 、 $y$ 座標上の2次元クロソイド曲線を示す図。

[図47] 2次元クロソイド曲線を示す図。

[図48] 3次元クロソイド曲線の $\alpha$ 、 $\beta$ の定義を示す図。

[図49] 典型的な3次元クロソイド曲線の形状を示す図。

[図50]  $G^2$ 連続な補間の条件を示す図。

[図51] 接触平面の概念を示す図。

[図52] クロソイド補間の手法の流れの概要を示す図。

[図53]  $G^2$ 連続となるような条件を満たすクロソイド補間の手法の流れの概要を示す図。

[図54] 点 $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ の3次元クロソイド補間を示す図。

[図55]  $r=4$ の3D Discrete Clothoid Splinesを示す図。

[図56] 3D Discrete Clothoid Splinesを説明する図。

[図57] 補間により生成された3次元クロソイド曲線の透視図。

[図58] 横軸に始点からの移動距離、縦軸に曲率を取った曲率変化グラフ。

[図59] 両端点で各値を制御する3次元クロソイド補間の流れの概要を示す図。

[図60] 両端点で各値を制御する3次元クロソイド補間の概略図。

[図61] 実際に補間を行った結果を示す図。

[図62] 各曲線の始点からの移動距離と曲率の関係のグラフ。

[図63] 中間点における値の制御を示す図。

[図64] 始点・終点で各値を制御する3次元クロソイドを用いた補間法の流れの概要を示す図。

[図65]  $r=4$ の3D Discrete Clothoid Splinesを示す図。

[図66] 生成されたポリゴンを示す図。

[図67] 点 $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ の3次元クロソイド補間を示す図。

[図68] 生成された曲線とポリゴンとを示す図。

[図69] 点を挿入した図。

[図70] 分割された3次元クロソイド曲線を示す図。

[図71] 生成された曲線を示す図。

[図72] 各曲線の始点からの移動距離 $s$ と曲率 $\kappa$ の関係を示すグラフ。

[図73] 数値制御方法を示す工程図。

[図74] 従来のスプライン曲線を示す比較図。

### 発明を実施するための最良の形態

#### [0051] A. クロソイド曲線を用いた工業製品の設計方法

以下、クロソイド曲線を用いた工業製品の設計方法の発明の実施形態について、1. 3次元クロソイド曲線の定義と特徴、2. 3次元クロソイド曲線を用いた補間法、3. 3次元クロソイド補間を用いて、ねじ装置としてのボールねじの回帰経路を設計する方法、4. 3次元クロソイド補間を用いた数

値制御方法に分けて順次説明する。

[0052] 1. 3次元クロソイド曲線の定義と特徴

[0053] (1-1) 3次元クロソイドの基本式

クロソイド曲線(Clothoid curve)は、別名コルニューの螺旋(Cornu' s spiral)とも呼ばれ、曲線の長さに比例して曲率が変化する曲線である。

[0054] 発明者が既に提案している2次元のクロソイド曲線は、平面曲線(2次元曲線)の一種であり、図1に示されるx y座標上において、次式で表される。

[0055] [数9]

$$P = P_0 + \int_0^s e^{j\phi} ds = P_0 + h \int_0^S e^{j\phi} dS, \quad 0 \leq s \leq h, \quad 0 \leq S = \frac{s}{h} \leq 1 \quad (1-1)$$

$$\phi = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 = \phi_0 + \phi_v S + \phi_u S^2 \quad (1-2)$$

ここで、

[数10]

$$P = x + jy, \quad j = \sqrt{-1} \quad (1-3)$$

は曲線上の点を表わす位置ベクトル、

[数11]

$$P_0 = x_0 + jy_0 \quad (1-4)$$

は、その初期値(始点の位置ベクトル)である。

[数12]

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi \quad (1-5)$$

は、曲線の接線方向を表わす単位ベクトル(長さが1のベクトル)であり、

その方向 $\phi$ は原線（ $x$ 軸方向）から反時計まわりに測られる。この単位ベクトルに微小長さ $ds$ をかけて積分すると曲線上の点 $P$ が求められる。

[0056] 曲線に沿って測った曲線の始点からの長さを $s$ とし、その全長（始点から終点までの長さ）を $h$ とする。 $s$ を $h$ で割った値を $S$ で表わす。 $S$ は無次元の値であり、これを曲線長変数と呼ぶ。

[0057] クロソイド曲線の特徴は、式(1-2)で示したように、接線方向角 $\phi$ が曲線長 $s$ または曲線長変数 $S$ の二次式で表わされることにある。 $c_0, c_1, c_2$ または $\phi_0, \phi_v, \phi_u$ は二次式の係数であり、これら及び曲線の全長 $h$ をクロソイドのパラメータと呼ぶ。図2は一般的なクロソイド曲線の形状を示す。

[0058] 以上の関係を3次元に拡張して、3次元クロソイド曲線の式を作る。従来3次元クロソイド曲線を与える式は知られていなかったが、発明者らは初めてこれを導いた。

[0059] 3次元クロソイド曲線を以下の式で定義する。

[0060] [数13]

$$P = P_0 + \int_0^s u \, ds = P_0 + h \int_0^S u \, dS, \quad 0 \leq s \leq h, \quad 0 \leq S = \frac{s}{h} \leq 1$$

(1-6)

$$u = E^k \beta E^j \alpha (i) = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{Bmatrix}$$

(1-7)

$$\alpha = a_0 + a_1 S + a_2 S^2 \quad (1-8)$$

$$\beta = b_0 + b_1 S + b_2 S^2 \quad (1-9)$$

ここで、

[数14]

$$P = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad P_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \quad (1-10)$$

はそれぞれ、3次元クロソイド上の点の位置ベクトル、及びその初期値を示す。 $i$ 、 $j$ 、 $k$ はそれぞれ、 $x$ 軸、 $y$ 軸、及び $z$ 軸方向の単位ベクトルである。

[0061]  $u$ は点 $P$ における曲線の接線方向を示す単位ベクトルであり、式(1-7)によって与えられる。式(1-7)において、 $E^{k\beta}$ 及び $E^{j\alpha}$ は回転マトリクスであり、図3に示されるように、それぞれ、 $k$ 軸（ $z$ 軸）まわりの角度 $\beta$ の回転及び $j$ 軸（ $y$ 軸）まわりの角度 $\alpha$ の回転を表わしている。前者をヨー(yaw)回転、後者をピッチ(pitch)回転という。式(1-7)は、 $i$ 軸（ $x$ 軸）方向の単位ベクトルを、まず $j$ 軸（ $y$ 軸）まわりに $\alpha$ だけ回し、しかるのちに $k$ 軸（ $z$ 軸）まわりに $\beta$ だけ回すことによって、接線ベクトル $u$ が得られることを示している。

[0062] すなわち、2次元の場合は、曲線の接線方向を表す単位ベクトル $e^{j\phi}$ は、 $x$ 軸からの傾き角度 $\phi$ から得られる。3次元の場合は、曲線の接線ベクトル $u$ は、ピッチ角 $\alpha$ 及びヨー角 $\beta$ から得ることができる。ピッチ角 $\alpha$ が0だと、 $x$   $y$ 平面で巻いた2次元クロソイド曲線が得られ、ヨー角 $\beta$ が0だと、 $x$   $z$ 平面で巻いた2次元クロソイド曲線が得られる。接線方向ベクトル $u$ に微小長 $ds$ をかけて積分すると3次元クロソイド曲線が得られる。

[0063] 3次元クロソイド曲線においては、接線ベクトルのピッチ角 $\alpha$ 及びヨー角 $\beta$ はそれぞれ式(1-8)及び式(1-9)に示すように、曲線長変数 $S$ の2次式で与えられる。このことによって接線方向の変化を自由に選びながら、なおかつ、その変化に連続性を持たせることが可能になる。

[0064] 以上の式によって示したごとく、3次元クロソイド曲線は「接線方向のピッチ角及びヨー角が、それぞれ曲線長変数の二次式で表わされる曲線である

」と定義される。

[0065]  $P_0$  から始まる一つの 3 次元クロソイド曲線は、  
[数15]

$$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h \quad (1-11)$$

の 7 個のパラメータによって決定される。 $a_0$  ないし  $b_2$  の 6 つの変数は角度の単位を持ち、クロソイド曲線の形状を表わしている。これに対し  $h$  は長さの単位を持ち、クロソイド曲線の大きさを表わしている。3 次元クロソイド曲線の典型的な例としては、図 4 に示されるような螺旋状の曲線がある。

[0066] (1-2) 3 次元クロソイド曲線上のフルネ標構と曲率

任意の 3 次元曲線があるとき、 $t$  をパラメータとして  $R(t)$  で表すとする。特に、始点からの移動距離  $s$  をパラメータとしたときは、 $R(s)$  で表すとする。

[0067]  $ds$  だけ差がある曲線上の 2 点の相対位置ベクトル  $dR(s)$  の絶対値を線素  $ds$  と考えると、 $ds$  と  $dt$  の間には次の (2-1) 式の関係がある。パラメータ  $t$  による  $R$  の微分を簡単のためドットを文字の上につけて表している。

[0068] [数16]

$$ds = |dR(t)| = \left| \frac{dR(t)}{dt} \right| dt = |\dot{R}| = \sqrt{\dot{R} \cdot \dot{R}} dt \quad (2-1)$$

[0069] 単位接線ベクトル  $u(t)$  は曲線の線素ベクトル  $dR(t)$  を基準化したものであるから (2-1) 式を参照すると、(2-2) 式で表わせる。

[0070] [数17]

$$u(t) = \frac{dR(t)}{|dR(t)|} = \frac{dR(t)}{ds} = \frac{\dot{R}}{|\dot{R}(t)|} \quad (2-2)$$

[0071] 次に、単位接線ベクトルの変化量  $du$  について考える。図 5 は単位法線ベクトルの変化量を示す。直線の場合は接線方向は変わらないから  $du(t) = \{0, 0, 0\}$  であるが、曲線ではそうではなく、距離  $ds$  だけ離れた位置における単位接

線ベクトルの変化量 $du$ は接線ベクトル $u$ と直交する。これは $u \cdot u=1$ の関係を微分すると直交関係 $u \cdot du=0$ が得られることから明らかである。この単位接線ベクトルの変化量 $du$ を基準化したものが単位主法線ベクトル $n(t)$ である。つまり、単位主法線ベクトル $n(t)$ は(2-3)式で表される。

[0072] [数18]

$$n(t) = \frac{\dot{u}(t)}{|\dot{u}(t)|} \quad (2-3)$$

[0073] 法線方向は人が接線方向を向いたときの左方向を正とする。より正確な言い方では、ベクトル $du$ と単位接線ベクトル $u(t)$ とで作る平面内で、単位接線ベクトル $u(t)$ から反時計まわりに90度回転した方向を単位主法線ベクトル $n(t)$ の正方向と定義する。

[0074] また、従法線ベクトル $b(t)$ は、単位接線ベクトル $u(t)$ と単位主法線ベクトル $n(t)$ の両方に直交するベクトルであり、(2-4)式で定義される。

[0075] [数19]

$$b(t) = u(t) \times n(t) \quad (2-4)$$

[0076] 定義された単位接線ベクトル $u(t)$ 、単位主法線ベクトル $n(t)$ 、従法線ベクトル $b(t)$ を3つのベクトルの組 $\{u(t), n(t), b(t)\}$ としたものを、曲線の位置 $R(t)$ におけるフルネ標構 (Frenet Frame) と呼ぶ。

[0077] 続けて、曲線の線素に沿って単位接線ベクトルの曲がる割合である曲率 $\kappa$ について述べる。3次元における曲率は、(2-5)式で定義される。

[0078] [数20]

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{R}(t) \times \ddot{R}(t)\|}{\|\dot{R}(t)\|^3} \quad (2-5)$$

[0079] 以上で定義される3次元曲線における基本的な量について、3次元クロソイ



ド曲線において曲線長変数 $S$ をパラメータとして用いた表現で記す。

[0080] 任意の3次元クロソイド曲線 $P(S)$ を考えたとき単位接線ベクトル $u(S)$ は、  
(2-2) 式より、(2-6) 式で表すことができる。

[0081] [数21]

$$u(S) = \frac{P'(S)}{|P'(S)|} \quad (2-6)$$

[0082] また、単位接線ベクトル $u(S)$ は3次元クロソイド曲線の定義式(1-7) (1-8) (1-9)を考慮すると次の(2-7) 式の形で表すこともできる。本明細書では、こちらの表現を主として用いる。

[0083] [数22]

$$u(S) = \begin{Bmatrix} \cos \beta(S) \cos \alpha(S) \\ \sin \beta(S) \cos \alpha(S) \\ -\sin \alpha(S) \end{Bmatrix} \quad (2-7)$$

[0084] 3次元クロソイド曲線の接線ベクトル $u(S)$ の曲線長変数 $S$ での1階微分したものは(2-8) 式で、その大きさは(2-9) 式で表される。

[0085] [数23]

$$u'(S) = \begin{Bmatrix} -\alpha'(S) \cos \beta(S) \sin \alpha(S) - \beta'(S) \sin \beta(S) \cos \alpha(S) \\ -\alpha'(S) \sin \beta(S) \sin \alpha(S) - \beta'(S) \cos \beta(S) \cos \alpha(S) \\ -\alpha'(S) \cos \alpha(S) \end{Bmatrix} \quad (2-8)$$

$$\|u'(S)\| = \sqrt{\alpha'(S)^2 + \beta'(S)^2 \cos^2 \alpha(S)} \quad (2-9)$$

[0086] 次に、単位主法線ベクトル $n(S)$ について考える。3次元曲線の法線ベクトルは、(2-3) 式で表されるので3次元クロソイド曲線の法線ベクトルは、(2-10) 式で表されることになる。

[0087] [数24]

$$\begin{aligned}
 n(S) &= \frac{u'(S)}{\|u'(S)\|} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha'(S)^2 + \beta'(S)^2 \cos^2 \alpha(S)}} \begin{Bmatrix} -\alpha'(S) \cos \beta(S) \sin \alpha(S) - \beta'(S) \sin \beta(S) \cos \alpha(S) \\ -\alpha'(S) \sin \beta(S) \sin \alpha(S) + \beta'(S) \cos \beta(S) \cos \alpha(S) \\ -\alpha'(S) \cos \alpha(S) \end{Bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{2-10}$$

[0088] 従法線ベクトル $b(S)$ については、(2-4)式により、(2-7)式の単位接線ベクトル $u(S)$ と(2-10)式の単位主法線ベクトル $n(S)$ から求めるものとした。

[0089] [数25]

$$b(S) = u(S) \times n(S) \tag{2-11}$$

[0090] 最後に曲率についてであるが、(2-5)式を変形すると(2-12)式で表せる。

[0091] [数26]

$$\kappa(S) = \frac{\|P'(S) \times P''(S)\|}{\|P'(S)\|^3} = \frac{\|u'(S)\|}{h} = \frac{\sqrt{\alpha'(S)^2 + \beta'(S)^2 \cos^2 \alpha(S)}}{h}
 \tag{2-12}$$

[0092] 以上より、3次元クロソイド曲線上の各点におけるフルネ標構と曲率 $\kappa$ を曲線長変数 $S$ から求めることができる。

[0093] (1-3) 向きが逆な3次元クロソイド曲線の生成

図6のような、ある3次元クロソイド曲線と同じ大きさ、形状で向きが逆な3次元クロソイド曲線を生成することをについて考える。

[0094] 始点 $P_s$ と終点 $P_e$ を持ち、3次元クロソイド曲線のクロソイドパラメータが、 $h, a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ の7つの値で決まる3次元クロソイド曲線 $C_1$ があるとする。そのとき、接線回転角 $\alpha_1, \beta_1$ は、下記の(2-13) (2-14)式で表される。

[0095] [数27]

$$\alpha_1 = a_0 + a_1 S + a_2 S^2 \quad (2-13)$$

$$\beta_1 = b_0 + b_1 S + b_2 S^2 \quad (2-14)$$

[0096] この3次元クロソイド曲線と同じ大きさ、形状で向きが逆な3次元クロソイド曲線 $C_2$ においては、始点を $P'_s$ と、 $P'_e$ を終点とすると、それぞれ $P'_s = P_e$ 、 $P'_e = P_s$ となる。まず曲線長 $h$ について考えるが、同じ大きさであることを考えると曲線長は曲線 $C_1$ 、 $C_2$ において等しい。次に3次元クロソイド曲線 $C_2$ における接線 $t$ は、常に同じ座標の3次元クロソイド曲線 $C_1$ における接線 $t$ と逆向きになることを考えると、曲線 $C_1$ の接線回転角 $\alpha_1$ 、 $\beta_1$ と曲線 $C_2$ の接線方向回転角 $\alpha_2$ 、 $\beta_2$ の間には、下記の関係があることがわかる。

[0097] [数28]

$$\alpha_2(S) = \alpha_1(1 - S) + \pi \quad (2-15)$$

$$\beta_2(S) = \beta_1(1 - S) \quad (2-16)$$

[0098] これらの式は整理すると、下記の(2-17) (2-18)式で表される。

[数29]

$$\alpha_2(S) = (a_0 + a_1 + a_2 + \pi) - (a_1 + 2a_2)S + a_2 S^2 \quad (2-17)$$

$$\beta_2(S) = (b_0 + b_1 + b_2) - (b_1 + 2b_2)S + b_2 S^2 \quad (2-18)$$

[0099] これによって残るパラメータが定まるので、曲線 $C_2$ のクロソイドパラメータ $h'$ 、 $a'_0$ 、 $a'_1$ 、 $a'_2$ 、 $b'_0$ 、 $b'_1$ 、 $b'_2$ は、曲線 $C_1$ のパラメータを用いて、(2-19)式で表せることになる。

[数30]

$$\left\{ \begin{array}{l} P'_s = P_e \\ a'_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \pi \\ a'_1 = -(a_1 + 2a_2) \\ a'_2 = a_2 \\ b'_0 = b_0 + b_1 + b_2 \\ b'_1 = -(b_1 + 2b_2) \\ b'_2 = b_2 \\ h' = h \end{array} \right. \quad (2-19)$$

[0100] この関係式を用いれば、同じ大きさ、形状で向きが逆な3次元クロソイド曲線を生成できる。

[0101] (1-4) 3次元クロソイド曲線の分割

始点  $P_1$  と終点  $P_2$  を持ち、3次元クロソイド曲線のクロソイドパラメータが、 $h, a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  の7つの値で決まる3次元クロソイド曲線  $C_0$  があるとする。このとき図7のように、点  $P_1, P_2$  を結ぶ3次元クロソイド曲線  $C_0$  を、途中の曲線長変数が  $S=S_d$  である点  $P_m$  で分割し、曲線  $C_1$  と  $C_2$  とに分割する方法について考えていく。

[0102] 分割された曲線のうち、点  $P_1$  を始点とする曲線  $C_1$  について考える。曲線長  $h$  について考えると、3次元クロソイド曲線の定義より、曲線  $C_1$  の曲線長  $h_1$  は曲線  $C_0$  の曲線長  $h_0$  の  $S_d$  倍に等しいことがわかる。また、同じ曲線  $C_1$  上の点を意味するときの曲線  $C_0$  の曲線長変数を  $S_0$ 、曲線  $C_1$  の曲線長変数を  $S_1$  とすると、これらの間には下記の関係が成り立つ。

[0103] [数31]

$$S_1 = S_d S_0 \quad (2-20)$$

[0104] つまり、曲線  $C_0$  の接線回転角  $\alpha_0, \beta_0$  と曲線  $C_1$  の接線回転角  $\alpha_1, \beta_1$  との間には、下記の関係があることがわかる。

[0105] [数32]

$$\begin{aligned}\alpha_1(S_1) &= \alpha_0(S_d S_0) \\ \beta_1(S_1) &= \beta_0(S_d S_0)\end{aligned}\quad (2-21)$$

[0106] これらの式は整理すると、下記の(2-22)式で表される。

[0107] [数33]

$$\begin{aligned}\alpha_1(S) &= a_0 + a_1 S_d S + a_2 S_d^2 S^2 \\ \beta_1(S) &= b_0 + b_1 S_d S + b_2 S_d^2 S^2\end{aligned}\quad (2-22)$$

[0108] これによって接線方向が定まるので、曲線 $C_1$ のクロソイドパラメータ $h'$ ,  $a'_0, a'_1, a'_2, b'_0, b'_1, b'_2$ は、曲線 $C_0$ のパラメータを用いて、(2-23)式で表せることになる。

[0109] [数34]

$$\begin{cases} a'_0 = a_0 \\ a'_1 = a_1 S_d \\ a'_2 = a_2 S_d^2 \\ b'_0 = b_0 \\ b'_1 = b_1 S_d \\ b'_2 = b_2 S_d^2 \\ h' = h S_d \end{cases}\quad (2-23)$$

[0110] 次に分割点 $P_m$ を始点とする曲線 $C_2$ について考える。曲線 $C_1$ については、1-3で述べた大きさ、形状が同じで向きが逆な曲線を生成する方法と曲線 $C_1$ の生成に用いた方法を組み合わせることによって生成できる。

[0111] まず、曲線 $C_0$ と大きさ、形状が同じで向きが逆な曲線を曲線 $C'_0$ とする。この曲線上において分割点 $P_m$ は、 $P_m = C'_0(1-S_d)$ で表される。ここで曲線 $C'_0$ を点 $P_m$ で分割することを考えると、その分割された曲線のうち点 $P_2$ を始点とする曲線 $C'_2$ は、曲線 $C_2$ と大きさ、形状が同じで向きが逆な曲線になっている。1-3で述べた方法と曲線 $C_1$ に用いた方法により曲線 $C'_2$ は、生成することができる。

ので、ここで、さらに曲線 $C'_2$ に対して1-3で述べた方法を用いれば、曲線 $C_2$ は生成することができる。

[0112] この曲線 $C_2$ のクロソイドパラメータ $h''$ ,  $a''_0$ ,  $a''_1$ ,  $a''_2$ ,  $b''_0$ ,  $b''_1$ ,  $b''_2$ は、曲線 $C_0$ のパラメータを用いて、下記の(2-24)式で表せる。

[0113] [数35]

$$\begin{cases} a''_0 = a_0 + a_1 S_d + a_2 S_d^2 \\ a''_1 = (1 - S_d) \{a_1 + 2a_2 S_d\} \\ a''_2 = a_2 (1 - S_d)^2 \\ b''_0 = b_0 + b_1 S_d + b_2 S_d^2 \\ b''_1 = (1 - S_d) \{b_1 + 2b_2 S_d\} \\ b''_2 = b_2 (1 - S_d)^2 \\ h'' = h(1 - S_d) \end{cases} \quad (2-24)$$

以上より、3次元クロソイド曲線 $C_0$ 上の曲線長変数が $S=S_d$ である点 $P_m$ で曲線を曲線 $C_1$ と $C_2$ とに分割することができる。

[0114] (1-5) 3次元クロソイド曲線の特徴

[0115] (a) 曲線の連続性

一つのクロソイド曲線（同一のパラメータで表わされるクロソイド曲線）においては、その接線方向のピッチ角及びヨー角がそれぞれ曲線長変数 $S$ の2次式で与えられるので、これを1回微分して得られる法線方向、及び、2回微分して得られる曲率が曲線長変数 $S$ に関して連続であることが保証される。言い換えれば、一つのクロソイド曲線の中では法線方向及び曲率が連続である。したがって、滑らかで性質の良い曲線が得られる。また、二つのクロソイド曲線を連結する場合にも、そのつなぎ目において接線、法線、曲率が連続になるようにパラメータを選択することによって、滑らかなひとつなぎの曲線を作ることができる。これをクロソイド曲線群という。

[0116] (b) 適用性

曲線の接線方向を二つの角度（ピッチ角及びヨー角）で振ることができるので、さまざまな条件に合わせた3次元曲線を任意に作ることができ、いろいろな用途に用いることができ、工業製品の設計に必要となる空間曲線の汎用的な発生方法を提供することができる。空間曲線に沿って物体が加減速を伴って運動する場合に、拘束力変化が滑らかな設計を可能とする。また曲線長に対して曲率の変化を適切に設計できることにより、審美的な意匠曲線設計など、様々な産業分野に有効に適用される。

[0117] (c) 幾何曲線との整合性

直線・円弧・ねじ曲線などの幾何曲線は、クロソイドパラメータのいくつかを0にし、あるいは、いくつかのパラメータ間に特定の関数関係を与えることによって作ることができる。これらの曲線はクロソイド曲線の一種であり、クロソイドのフォーマットを用いて表現できる。

[0118] また、 $\alpha$ または $\beta$ のいずれかを常に0と置くことによって、2次元クロソイドを作ることができるので、これまで2次元クロソイドについてすでに得られている資源を活用することができる。

[0119] すなわち、既に知られている2次元クロソイドを含めて、円弧や直線などの個別の曲線も、 $\alpha$ や $\beta$ を適切に設定することで表現できる。このような個別の曲線について同一の形式の3次元クロソイド曲線式を用いることができるので、計算手順を単純化できる。

[0120] (d) 見通しの良さ

スプライン補間などの従来の補間法では、自由曲線を数式化した際に、その全体の形、あるいは局所的な形が分かりにくいことが多いが、3次元クロソイドにおいては、ピッチ角及びヨー角のそれぞれを想定することによって、比較的容易に全体像を把握することができる。

[0121] また、クロソイド曲線として表現した途端に線長・接線方向・曲率等の値は既知となっており、従来の補間法のように、あらためて計算する必要がない。すなわち、曲線のパラメータSに対応して、(1-7)、(2-10)及び(2-12)式

に示すように、曲線の接線や、法線、曲率が直接的に求められる。

[0122] (e) 運動制御のやりやすさ

曲線の主変数が長さ  $s$  または正規化された長さ  $S$  であり、曲線の方程式はこの長さに対する自然方程式で与えられている。このため、長さ  $s$  を時間  $t$  の関数として定めることによって、加減速などの運動特性を任意に与えることができ、従来カムなどに用いられてきた特性の良い運動曲線を採用することによって、加工作業の高速化を図ることができる。長さ  $s$  は実在のカルテシアン空間における値として与えられ、速度・加速度は接線方向に対して求められるので、従来の補間法のように各軸ごとに与えられた値を合成する必要がない。また、曲率の計算が容易なため、運動時の遠心加速度も容易に求められ、運動軌跡に応じた制御を行うことができる。

[0123] 2. 3次元クロソイド曲線を用いた補間法

[0124] (2-1) 滑らかな接続の数学的条件

1本の3次元クロソイド曲線では、曲線の形状表現に限界がある。ここでは、数値制御による工具の運動制御を主な目的として、3次元クロソイド曲線（3次元クロソイド線分）を複数本接続し、この複数本の3次元クロソイド曲線によって工業製品の形状を設計する。3次元クロソイド曲線を用いた補間法を以降、3次元クロソイド補間と呼ぶ。以降、補間によって生成される曲線群全体を3次元クロソイド曲線と呼び、それを構成する単位曲線を3次元クロソイド線分と呼ぶ。

[0125] 2本の3次元クロソイド線分がその端点で滑らかに接続されていることは、端点位置、接線および曲率が連続に接続されていることであると定義される。上述の定義式を用いて、この条件は、以下のように記述される。最初の3式は位置の連続性、次の2式は接線の連続性、次の1式は法線の一致、最後の式は曲率の連続性を示している。

[0126] [数36]



$$\begin{aligned}
P_{x_i}(1) &= P_{x_{i+1}}(0) \\
P_{y_i}(1) &= P_{y_{i+1}}(0) \\
P_{z_i}(1) &= P_{z_{i+1}}(0) \\
\alpha_i(1) &= \alpha_{i+1}(0) \\
\beta_i(1) &= \beta_{i+1}(0) \\
\tan \gamma_i(1) &= \tan \gamma_{i+1}(0) \\
\kappa_i(1) &= \kappa_{i+1}(0)
\end{aligned} \tag{3-1}$$

[0127] これは、接続点で接線ベクトルと法線ベクトル、曲率と  $\alpha$ 、 $\beta$  連続であるための十分条件であり、条件がきつすぎる場合がある。そこで純粋に条件を満たすように下記のように条件を変えることもできる。

[0128] [数37]

$$\begin{aligned}
P_{x_i}(1) &= P_{x_{i+1}}(0) \\
P_{y_i}(1) &= P_{y_{i+1}}(0) \\
P_{z_i}(1) &= P_{z_{i+1}}(0) \\
\cos[\alpha_i(1) - \alpha_{i+1}(0)] &= 1 \\
\cos[\beta_i(1) - \beta_{i+1}(0)] &= 1 \\
\tan \gamma_i(1) &= \tan \gamma_{i+1}(0) \\
\kappa_i(1) &= \kappa_{i+1}(0)
\end{aligned} \tag{3-2}$$

[0129] ここでさらに、

[数38]

$$\cos[\alpha_i(1) - \alpha_{i+1}(0)] = 1$$

であることを考慮にいと

[数39]

$$\tan \gamma_i(1) = \tan \gamma_{i+1}(0)$$

は、下記の条件で置き換えられる。

[数40]

$$\begin{aligned}\tan \gamma_i(1) &= \tan \gamma_{i+1}(0) \\ \frac{\alpha'_i(1)}{\beta'_i(1) \cos \alpha_i(1)} &= \frac{\alpha'_{i+1}(0)}{\beta'_{i+1}(0) \cos \alpha_{i+1}(0)} \\ \therefore \alpha'_i(1) \beta'_{i+1}(0) &= \alpha'_{i+1}(0) \beta'_i(1)\end{aligned}$$

結局下記の条件を満たせば目的を達成することが出来ることがわかる。

[0130] [数41]

$$\begin{aligned}P_{x_i}(1) &= P_{x_{i+1}}(0) \\ P_{y_i}(1) &= P_{y_{i+1}}(0) \\ P_{z_i}(1) &= P_{z_{i+1}}(0) \\ \cos[\alpha_i(1) - \alpha_{i+1}(0)] &= 1 \\ \cos[\beta_i(1) - \beta_{i+1}(0)] &= 1 \\ \alpha'_i(1) \beta'_{i+1}(0) &= \alpha'_{i+1}(0) \beta'_i(1) \\ \kappa_i(1) &= \kappa_{i+1}(0)\end{aligned} \quad (3-3)$$

[0131] (3-3)式において、最初の3式は位置の連続性、次の2式は接線方向の連続性、次の1式は法線方向の一致、最後の式は曲率の連続性を示している。 $G^2$ 連続な補間を行うには、2本の3次元クロソイド曲線がその端点で(3-3)式の7つの条件式を満たす必要がある。

[0132]  $G^2$ 連続（GはGeometryの頭文字）について補足する。図8は $G^2$ 連続な補間の条件を示す。

[0133]  $G^0$ 連続とは2本の3次元クロソイド曲線がその端点で位置が一致することをいい、 $G^1$ 連続とは接線方向が一致することをいい、 $G^2$ 連続とは接触平面（法線）及び曲率が一致することをいう。以下の表1にスプライン曲線で用いられる $C^0 \sim C^2$ 連続と本発明のクロソイド曲線で用いられる $G^0 \sim G^2$ 連続とを対比する。

[0134] [表1]

$C^0$ : 位置	$G^0$ : 位置
$C^1$ : 一次微分係数	$G^1$ : 接線方向
$C^2$ : 二次微分係数	$G^2$ : 接触平面(法線)、曲率

[0135] 2本の3次元クロソイド曲線の連続性を考えたときに、 $C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow C^2$ 、 $G^0 \rightarrow G^1 \rightarrow G^2$ になるにしたがって補間条件が厳しくなる。 $C^1$ 連続では接線の大きさも方向も一致する必要があるが、 $G^1$ 連続では接線方向だけが一致すればよい。2本の3次元クロソイド曲線で接線を滑らかに接続する場合は、 $G^1$ 連続で条件式を作成するほうがよい。スプライン曲線のように $C^1$ 連続で条件式を作成すると、幾何学的には関係のない接線の大きさが一致するという条件が入るので、条件が厳しくなりすぎる。 $G^1$ 連続で条件式を作成すると、一次微分係数の大きさを自由にとれるという利点がある。

[0136]  $G^2$ 連続では接触平面（法線）を一致させる。接触平面とは図9に示されるように曲線Cが局所的に含まれる平面 $S_1$ 、 $S_2$ をいう。この図9では点Pにおいて接線方向が連続であるが接触平面 $S_1$ 、 $S_2$ が不連続の例を示している。3次元曲線の連続性を考えたときに、接線方向の一致の次に考えなければいけないことは接触平面の一致である。曲率を議論するときには接触平面が一致していないと意味がなく、接触平面を一致させた上で曲率を一致させる必要がある。2本の3次元曲線で、座標、接線方向、接触平面（法線方向）及び曲率を一致させることが $G^2$ 連続を満たす条件になる。

[0137] (2-2) 具体的な計算手順  
次の2種類の計算手順がある。

[0138] (a) 曲線のパラメータ $h, \alpha, \beta$ を与えて、1本の3次元クロソイド曲線を発生させ、その端点で、(3-3)式を満たすように次の3次元クロソイド曲線のパラメータを定める。このようにして、次々と滑らかに接続する3次元クロソイド曲線を発生させることができる。この計算手順によれば、曲線パラメータの算出は容易であり、これを順解と呼ぶ。この方式によれば、様々な形状の

曲線を容易に発生できるが、曲線が通過する接続点を明示的に指定することはできない。

[0139] (b) 予め指定された点群が曲線の接続点となるように、3次元クロソイド曲線を接続することが出来る。ここでは、離散的に任意に与えられた点列の各区間毎に短いクロソイド曲線（クロソイドセグメント）を作成する。この場合には、(3-3)式を満たすように曲線パラメータを決定する計算手順は(a)より複雑であり、繰り返し収束計算となる。この計算手順を、接続条件から逆に曲線パラメータを決定する、ということから、逆解と呼ぶ。

[0140] 上記(b)の逆解について、計算手法を詳細に記述する。解くべき計算問題は、次のように定式化される。

未知パラメータ：曲線パラメータ

拘束条件：(3-3)式、あるいはその一部

[0141] 要求される問題に応じて、拘束条件の数は変化し、それに見合う数の曲線パラメータを未知パラメータとして設定すればよい。例えば、曲率の連続性が要求されない場合には、一部の曲線パラメータを自由に動かすことが出来る。あるいは、曲率連続でかつ接線方向が指定されている場合には、補間に用いる3次元クロソイド曲線の数を分割により増やして、対応する未知曲線パラメータを増やす必要がある。

[0142] 上記の繰り返し収束計算を安定に収束させるためには、計算上の工夫が必要である。計算の発散を避け、収束を速めるために、未知パラメータについてより良い初期値を設定することは有効である。そのために、与えられた接続点などの拘束条件を満たす、より単純な補間曲線、例えば線形スプライン曲線などを発生させ、その曲線形状から、3次元クロソイド曲線の曲線パラメータを推算して、繰り返し収束計算の初期値とすることは有効である。

[0143] あるいは、満たすべき拘束条件を一気に満たすのではなく、順次条件式を増やしていく方式も、安定に解を得る手法として有効である。例えば、曲線発生の手順を次のような三つのSTEPに分けて、順次実行する。第1STEPとして位置情報と接線方向が一致するように補間した後で、第2STEPとして法線

方向を一致するように補間を行い、第3 STEPで曲率も一致するように補間する。この手法の流れの概要を図10に記す。必要な3次元クロソイド曲線式及びその接線、法線や曲率の定義式は既に示した。

[0144] (2-3) 3次元クロソイド曲線を用いた補間法の実施例

[0145] (a) 補間法の流れ

3次元クロソイド曲線を用いて与えられた点列の間を滑らかに補間していく手法の一実施例について詳しく述べる。

[0146] 3次元クロソイド補間の基本の流れとしては、補間対象の点間を結ぶ3次元クロソイドセグメントの各パラメータを未知数とし、厳密に補間対象の点を通り、かつ $G^2$ 連続となるような条件を満たす解をニュートン・ラプソン法で求めて曲線を生成する。この流れの概要をまとめたものが図11である。 $G^2$ 連続とは、2本の3次元クロソイド曲線がその端点で位置、接線方向、法線方向及び曲率が一致することをいう。

[0147] (b)  $G^2$ 連続な補間の条件

3次元クロソイド補間において、厳密に補間対象の点を通り、かつ $G^2$ 連続となるような条件について具体的な条件を考える。

[0148] 今、簡単に3つの点 $P_1 = \{P_{x_1}, P_{y_1}, P_{z_1}\}$ ,  $P_2 = \{P_{x_2}, P_{y_2}, P_{z_2}\}$ ,  $P_3 = \{P_{x_3}, P_{y_3}, P_{z_3}\}$ があり、その点を3次元クロソイド線分で補間することを考える。図12は点 $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ の3次元クロソイド補間を示す。点 $P_1$ ,  $P_2$ 間を結ぶ曲線を曲線 $C_1$ 、点 $P_2$ ,  $P_3$ 間を結ぶ曲線を曲線 $C_2$ とすると、この場合未知数は、曲線 $C_1$ のパラメータ $a0_1, a1_1, a2_1, b0_1, b1_1, b2_1, h_1$ 、曲線 $C_2$ のパラメータ $a0_2, a1_2, a2_2, b0_2, b1_2, b2_2, h_2$ の14個となる。また、以後説明にでてくる文字のサブスクリプトは各曲線のサブスクリプトに対応している。

[0149] ここで厳密に補間対象の点を通り、かつ $G^2$ 連続となるような条件を考える。まず、始点においては厳密に補間対象の点を通るという条件は3次元クロソイド曲線の定義から考えると、始点を与えた時点で必然的に達成されるので補間条件はない。次に接続点 $P_1$ では位置について3つ、接線ベクトルについて2つ、曲率連続の条件の式が大きさや方向について2つの合計7個成り立つ

。また終点については、点 $P_2$ では位置について3つの3個である。以上より条件式は合計で10個ある。しかし、これでは未知数14個に対して、条件式が10個しか存在しないので未知数の解を求めることができない。そこで、本研究においては、両端点の接線ベクトルを与え、両端点について2つずつの条件を増やし条件式と未知数の数を等しくした。また、始点における接線方向を決定すれば $a_0$ ,  $b_0$ は、その定義式より求めることができるので未知数として扱わないことにした。以下、各条件について考えていく。

[0150] まず、位置の条件について考えると、下記の(4-1)(4-2)(4-3)式の3つが成り立つ。(以下自然数 $i < 3$ とする。)

[数42]

$$Px_i + h_i \int_0^1 \cos(a_0_i + a_1_i S + a_2_i S^2) \cos(b_0_i + b_1_i S + b_2_i S^2) dS - Px_{i+1} = 0 \quad (4-1)$$

$$Py_i + h_i \int_0^1 \cos(a_0_i + a_1_i S + a_2_i S^2) \sin(b_0_i + b_1_i S + b_2_i S^2) dS - Py_{i+1} = 0 \quad (4-2)$$

$$Pz_i + h_i \int_0^1 (-\sin(a_0_i + a_1_i S + a_2_i S^2)) dS - Pz_{i+1} = 0 \quad (4-3)$$

[0151] 次に、接線方向について考えると(4-4)(4-5)の2つの式が成り立つ。

[数43]

$$\cos(a_0_i + a_1_i + a_2_i - a_0_{i+1}) = 1 \quad (4-4)$$

$$\cos(b_0_i + b_1_i + b_2_i - b_0_{i+1}) = 1 \quad (4-5)$$

[0152] 曲率 $\kappa$ の大きさについては、次の式(4-6)が成り立つ。

[数44]

$$\kappa_i(1) - \kappa_{i+1}(0) = 0 \quad (4-6)$$

[0153] 最後に法線方向ベクトル $n$ について考える。3次元クロソイド曲線の法線ベクトル $n$ は、(2-10)式で表される。

[0154] ここで3次元クロソイド曲線の接線ベクトル $u$ の決定と同様に回転を用いて、法線ベクトル $n$ を考えてみる。初期接線方向 $(1, 0, 0)$ に対して、初期法線方向を定数 $\gamma$ を用いて $(0, \cos \gamma, -\sin \gamma)$ で表すとする。これを接線と同じように回転させると、法線 $n$ は式(4-7)のように表される。

[0155] [数45]

$$\begin{aligned}
 n(S) &= \begin{bmatrix} \cos \beta(S) & -\sin \beta(S) & 0 \\ \sin \beta(S) & \cos \beta(S) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha(S) & 0 & \sin \alpha(S) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha(S) & 0 & \cos \alpha(S) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} -\sin \gamma \cos \beta(S) \sin \alpha(S) - \cos \gamma \sin \beta(S) \\ -\sin \gamma \sin \beta(S) \sin \alpha(S) + \cos \gamma \cos \beta(S) \\ -\sin \gamma \cos \alpha(S) \end{Bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{4-7}$$

[0156] (2-10) (4-7) 式を比較すると、 $\sin \gamma$ ,  $\cos \gamma$ は(4-8)式に対応していることがわかる。

[0157] [数46]

$$\begin{aligned}
 \sin \gamma &= \frac{\alpha'(S)}{\sqrt{\alpha'(S)^2 + \beta'(S)^2 \cos^2 \alpha(S)}} \\
 \cos \gamma &= \frac{\beta'(S) \cos \alpha(S)}{\sqrt{\alpha'(S)^2 + \beta'(S)^2 \cos^2 \alpha(S)}}
 \end{aligned}
 \tag{4-8}$$

[0158] つまり、式(4-8)より、3次元クロソイド補間における接続点での法線連続を達成するには $\tan \gamma$ が、連続であればよいことがわかる。

[0159] [数47]

$$\tan \gamma = \frac{\alpha'(S)}{\beta'(S) \cos \alpha(S)}
 \tag{4-9}$$

[0160] つまり法線連続である条件は、式(4-10)であることがわかる。

[0161] [数48]

$$\tan \gamma_i(1) = \tan \gamma_{i+1}(0) \quad (4-10)$$

[0162] ここでさらに、

[数49]

$$\cos[\alpha_i(1) - \alpha_{i+1}(0)] = 1 \quad (4-11)$$

であることを考慮にいとると条件式(4-10)は、下記の条件式(4-12)で置き換えられる。つまり、法線連続である条件は(4-12)式である。

[数50]

$$\alpha'_i(1)\beta'_{i+1}(0) = \alpha'_{i+1}(0)\beta'_i(1) \quad (4-12)$$

[0163] 以上をまとめると厳密に補間対象の点を通り、かつ $G^2$ 連続となるような条件は接点では式(4-13)のようになることがわかる。また、始点・終点においてもこれらのうちのいくつかの条件が選択される。

[0164] [数51]

$$\begin{aligned} P_{X_i}(1) &= P_{X_{i+1}}(0) \\ P_{Y_i}(1) &= P_{Y_{i+1}}(0) \\ P_{Z_i}(1) &= P_{Z_{i+1}}(0) \\ \cos[\alpha_i(1) - \alpha_{i+1}(0)] &= 1 \\ \cos[\beta_i(1) - \beta_{i+1}(0)] &= 1 \\ \alpha'_i(1)\beta'_{i+1}(0) &= \alpha'_{i+1}(0)\beta'_i(1) \\ \kappa_i(1) &= \kappa_{i+1}(0) \end{aligned} \quad (4-13)$$

[0165] 以上より、未知数 $a1_1, a2_1, b1_1, b2_1, h_1, a0_2, a1_2, a2_2, b0_2, b1_2, b2_2, h_2$ の12個に対して、条件式は下記の12個が成り立つことがわかる。(点 $P_3$ における接線方向回転角を $\alpha_3, \beta_3$ とする。)



[0166] [数52]

$$\begin{aligned}
P_{x_1}(1) &= P_{x_2}(0) \\
P_{y_1}(1) &= P_{y_2}(0) \\
P_{z_1}(1) &= P_{z_2}(0) \\
\cos[\alpha_1(1) - \alpha_2(0)] &= 1 \\
\cos[\beta_1(1) - \beta_2(0)] &= 1 \\
\alpha'_1(1)\beta'_2(0) &= \alpha'_2(0)\beta'_1(1) \\
\kappa_1(1) &= \kappa_2(0) \\
P_{x_2}(1) &= P_{x_3}(0) \\
P_{y_2}(1) &= P_{y_3}(0) \\
P_{z_2}(1) &= P_{z_3}(0) \\
\cos[\alpha_2(1) - \alpha_3] &= 1 \\
\cos[\beta_2(1) - \beta_3] &= 1
\end{aligned} \tag{4-14}$$

[0167] これで未知数 12 個について 12 個の式が成り立つので解を求めることができる。これをニュートン・ラブソン法によって解き、解を求める。

[0168] また、一般的に  $n$  個の点列を補間するときを考えると、条件式は今述べてきた自然数  $i$  を  $i < n$  と拡張すればよい。後は未知数と条件式の数の問題である。

[0169] 例えば  $n-1$  個の点列があるとき、 $N$  個の未知数と  $N$  個の関係式が成り立つとする。ここでさらに 1 点増えたとすると、未知数は 3 次元クロソイド線分  $P_{n-1}$ ,  $P_n$  のクロソイドパラメータ  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h$  の 7 つが増える。一方で、条件式は、接続点がひとつ増えるので点  $P_{n-1}$  で位置について 3 つ、接線ベクトルについて 2 つ、点  $P_{n-1}$  の曲率連続の条件の式が大きさや方向について 2 つの合計 7 つ増える。

[0170]  $n=3$  では未知数、関係式ともに 12 個であることがわかっているから、 $n \geq 3$  では、未知数は  $7(n-2) + 5$  個、これに対して成り立つ式も  $7(n-2) + 5$  個ある。これで未知数とそれに関する条件の数が等しくなるので、 $n$  個の自由点列の場合も 3 点の場合と同様の方法で解を求めることが可能である。解法としては、未知数と条件式の間には (4-15) (4-16) 式の関係が成り立つことを利用したニュートン・ラブソン法を用いて解いた。(条件を  $F$  未知数を  $u$

、誤差ヤコビアン行列Jとする。)

[0171] [数53]

$$\Delta F = [J] \Delta u \quad (4-15)$$

$$\Delta u = [J]^{-1} \Delta F \quad (4-16)$$

[0172] 以上より、n個の点列に対しても厳密に補間対象の点を通り、かつ $G^2$ 連続となるような3次元クロソイド補間が行えることがわかる。

[0173] (C) 初期値の決定

ニュートン・ラプソン法においては、解の探索を始める際に適当な初期値を与える必要がある。初期値はどのように与えられてもいいが、ここではその初期値の与え方の一例について述べる。

[0174] 補間では、まず点列から各未知数の初期値を決定する必要があるが、本研究ではLiらの3D Discrete Clothoid Splinesの多角形Qの単純形である補間対象点列間に頂点を4つもつものを生成し、この多角形Qからその初期値を算出し、決定した。3D Discrete Clothoid Splinesは、厳密に補間対象点を通り、曲率が始点からの移動距離に対して滑らかに変化するような性質を持っている。本明細書では3次元クロソイド補間のための初期値を、図13のような $r=4$ の3D Discrete Clothoid SplinesのポリゴンQを作り、そこから計算で決定した。

[0175] ここで3D Discrete Clothoid Splinesについて補足説明する。図14に示されるようにまず、補間対象の点列を頂点とする多角形Pを作り、Pの各頂点間に同じ数 $r$ 個ずつ新たな頂点を挿入し、 $P \subset Q$ となるような多角形Qを作る。ここでPの頂点が $n$ 個あるとすると、ポリゴンQは閉じている場合で $rn$ 個、開いている場合で $r(n-1)+1$ 個の頂点を持つことになる。以後サブスクリプトを始点からの通し番号として、各頂点を $q_i$ で表すことにする。また、各頂点において、方向として従法線ベクトル $b$ を、大きさとして曲率 $\kappa$ を持つようなベクトル $k$ を定める。

[0176] このとき、下記の頂点同士が等距離になるような式(4-17)を満たし、曲率

が始点からの移動距離に比例するような条件に最も近くなるときの（式（4-18）の関数を最小化するときの）ポリゴンQを 3D Discrete Clothoid Splinesと言う。

[0177] [数54]

$$|q_{i-1} q_i| = |q_{i+1} q_i|, \quad (q_i \notin P) \quad (4-17)$$

$$\sum_{i=1}^{r-1} \|\Delta^2 k_{ir+1}\|^2, \quad i = \{0 \dots n-1\}, \quad \Delta^2 k_i = k_{i-1} - 2k_i + k_{i+1} \quad (4-18)$$

[0178] 3D Discrete Clothoid Splinesでは各頂点のフレネ標構がすでに求まっている。そこで、その単位接線方向ベクトル $t$ よりパラメータ $a_0, b_0$ を求める。この接線方向ベクトル $t$ はポリゴンQを求めたときにすでに既知となっており、この $t$ と3次元クロソイド曲線の接線の式とにより、ポリゴンQの頂点の接線方向回転角 $\alpha, \beta$ が求まる。これにより各曲線の $a_0, b_0$ の初期値が求まる。また、始点から始まる3次元クロソイド線分においては、その値を与える。

[0179] [数55]

$$u = \begin{Bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{Bmatrix} \quad (4-19)$$

[0180] ここで、3D Discrete Clothoid Splinesは、頂点が等距離に並んでいることを考えると、図13の点 $q_{4i+1}$ では、曲線長変数 $S$ が $1/4$ であると近似することができる。同様に点 $q_{4(i+1)-1}$ では、曲線長変数 $S$ が $3/4$ であると近似することができる。これらを3次元クロソイド曲線の $\alpha$ の式とをあわせて考慮すると下記の式（4-20）が成り立つ。

[0181] [数56]

$$\begin{cases} a_{0_{4i}} + \frac{1}{4}a_{1_{4i}} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a_{2_{4i}} = a_{0_{4i+1}} \\ a_{0_{4i}} + \frac{3}{4}a_{1_{4i}} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 a_{2_{4i}} = a_{0_{4(i+1)-1}} \end{cases} \quad (4-20)$$

[0182] この式は未知数が $a_{1_{4i}}$ と $a_{2_{4i}}$ の2次元連立方程式になっており、これを解いてパラメータ $a_1$ ,  $a_2$ の初期値とする。同様にパラメータ $b_1$ ,  $b_2$ の初期値も決定できる。

[0183] 残る未知数は曲線長 $h$ であるが、この初期値については3次元クロソイド曲線の曲率の式により算出する。3次元クロソイド曲線の曲率は、式(4-21)で表される。

[0184] [数57]

$$\kappa = \frac{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 \cos^2 \alpha}}{h} \quad (4-21)$$

[0185] この式を変形すると式(4-22)になり、 $h$ の初期値が決定される。

[数58]

$$h_{4i} = \frac{\sqrt{(a_{1_{4i}} + 2a_{2_{4i}})^2 + (b_{1_{4i}} + 2b_{2_{4i}})^2 \cos^2(a_{0_{4i}} + a_{1_{4i}} + a_{2_{4i}})}}{\kappa_{4(i+1)}} \quad (4-22)$$

[0186] 以上の方法で7つの3次元クロソイドパラメータについて初期値を決定することができる。この決定した初期値を用い(b)で述べたような $G^2$ 連続となるような条件下で各曲線のパラメータの近似値をニュートン・ラプソン法によって求めた。これによって得られたパラメータから3次元クロソイド線分を生成し、点列間を3次元クロソイド曲線で補間することを行った。

[0187] (d) 補間例

実際に以上に述べた手法で点列を補間した例として(0.0, 0.0, 0.0),

(2.0, 2.0, 2.0), (4.0, 0.0, 1.0), (5.0, 0.0, 2.0)の4点を3次元クロソイド補間した例を挙げる。補間により生成された3次元クロソイド曲線の透視図を図15に載せた。図15は実線が3次元クロソイド曲線であり、破線、一点鎖線、二点鎖線の直線は曲線上の各点における、大きさを $\log(\text{曲率半径} + \text{自然対数}e)$ に、方向を法線ベクトルにとった曲率半径変化パターンである。

[0188] さらに表2に各曲線のパラメータを、また表3に、各接続点での座標・接線・法線・曲率のずれを載せた。これらより各接続点で $G^2$ 連続となるような3次元クロソイド曲線が生成されていることがわかる。また、図16は横軸に始点からの移動距離、縦軸に曲率を取った曲率変化グラフである。

[0189] [表2]

### 各3次元クロソイド線分のパラメータ

#### 曲線1 (曲率半径変化パターン 破線)

$$\begin{aligned}\alpha &= -0.657549 - 1.05303S + 1.84584S^2 \\ \beta &= 1.03297 + 1.29172S - 2.55118S^2 \\ h &= 3.82679 \\ P_0 &= (0.0, 0.0, 0.0)\end{aligned}$$

#### 曲線2 (曲率半径変化パターン 一点鎖線)

$$\begin{aligned}\alpha &= 0.135559 + 2.18537S - 2.69871S^2 \\ \beta &= -0.226655 - 3.15603S + 3.03298S^2 \\ h &= 3.16932 \\ P_0 &= (2.0, 2.0, 2.0)\end{aligned}$$

#### 曲線3 (曲率半径変化パターン 二点鎖線)

$$\begin{aligned}\alpha &= -0.377569 - 1.45922S + 0.984945S^2 \\ \beta &= -0.349942 + 1.32198S - 0.873267S^2 \\ h &= 1.43987 \\ P_0 &= (4.0, 0.0, 1.0)\end{aligned}$$

[0190] [表3]

各接続点での座標・接線・法線・曲率のずれ

曲線 1 と曲線 2 の接続点

Coord:  $(1.16 \times 10^{-5}, 2.00 \times 10^{-6}, 3.82 \times 10^{-6})$

Tvector:  $(7.59 \times 10^{-5}, 1.50 \times 10^{-5}, 2.95 \times 10^{-4})$

Nvector:  $(2.93 \times 10^{-4}, 9.19 \times 10^{-5}, -7.57 \times 10^{-6})$

Curvature:  $3.06 \times 10^{-7}$

曲線 2 と曲線 3 の接続点

Coord:  $(-4.33 \times 10^{-6}, -1.64 \times 10^{-6}, 1.11 \times 10^{-5})$

Tvector:  $(2.06 \times 10^{-6}, 2.33 \times 10^{-4}, 1.97 \times 10^{-4})$

Nvector:  $(3.30 \times 10^{-4}, 1.19 \times 10^{-5}, -3.23 \times 10^{-5})$

Curvature:  $5.96 \times 10^{-6}$

[0191] (2-4) 両端における各値の制御を考慮した  $G^2$  連続な 3 次元クロソイド補間

[0192] (a) 補間条件と未知数

2-3で述べたように、曲線が開いている場合で補間対象の点が  $n$  個あるとき、点列は  $n-1$  個の曲線で 3 次元クロソイド補間される。厳密に各点を通るなら各 3 次元クロソイド線分について未知数は  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h$  の 7 つあるので、未知数は全体で  $7(n-1)$  個あることになる。一方、条件式については、 $n-2$  個ある接続点ごとに座標、接線、法線、曲率の 7 個ずつと終点における座標の 3 個が存在するので、全部で  $7(n-2)+3$  個である。2-3の手法ではこれに始点・終点における接線ベクトルを与え、条件を 4 個増やすことによって、条件式と未知数の数を合わせていた。

[0193] ここで、始点・終点における接線・法線・曲率を制御し、かつ  $G^2$  連続となるように補間するなら、条件は両端における接線を制御したときと比べて、さらに始点・終点で法線・曲率について 2 個ずつの合計 4 個増えることになる。すると、条件式は全部で  $7n-3$  個ということになる。この場合、未知数の数が条件より少なくなるため、ニュートン・ラプソン法で解を求めることはで

きない。そのため、なんらかの方法で未知数を増やす必要がある。

[0194] そこで、ここでは、補間対象点を新たに挿入することによって未知数と条件式の数とを等しくすることにした。例えば、4つ未知数の方が多いのであれば、新たな点を2つ挿入し、各点の座標のうち2つを未知数として扱う。

[0195] この場合接続点が2つ増えるので、各接続点について条件が座標、接線、法線、曲率の7個ずつの14個増える。一方で、未知数は3次元クロソイド線分が2つ増えるので、 $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h$ の7つずつの合計14個の未知数が増えることになる。このとき点列に含まれる点の数は $n+2$ 個であるから、全体で考えると未知数は $7(n+1)$ 個、条件式は $7(n+1)+4$ 個ということになる。ここでさらに、新たに挿入した点の座標のうち2つを未知数として扱うとすると、未知数は4つ増えることになる。すると、未知数も条件式も $7(n+2)-3$ 個となり、未知数の解を求めることができるようになる。このように新たな点を挿入することによって、与えられた各点を厳密に通る $G^2$ 連続かつ、両端点の接線・法線・曲率を制御した補間を行うことが可能になる。

[0196] さらに一般的な場合について考える。 $n$ 個の点列を補間するとき、両端点で $m$ 個の項目を制御する場合についての挿入する点の数とその点において未知数として扱う座標の数について考える。先にも書いたが、曲線が開いている場合、点列は $n-1$ 個の曲線で補間される。もし、厳密に各点を通るなら各3次元クロソイド線分について未知数は $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h$ の7つあるので、未知数は全体で $7(n-1)$ 個あることになる。一方、条件式については、 $n-2$ 個ある接続点ごとに座標、接線、法線、曲率の7個ずつと終点における座標の3個が存在するので、全部で $7(n-2)+3$ 個であり、条件式の方が4つ少ない。つまり、両端点において制御されるべき項目は4つ以上ということになる。以下、説明中で $m$ は4以上の自然数、 $k$ は2以上自然数であるとして、新たに点を挿入したときに条件式と未知数の数を等しくする方法について述べる。

[0197] (i)  $m=2k$ のとき

両端であわせて $m=2k$ 個の項目を制御するとき、未知数は全体で $7(n-1)$ 個、条件式は全体で $7(n-1)-4+2k$ 個である。このとき過剰な条件式は $2k-4$ 個である

。今、 $k-2$ 個の点を新たに挿入することを考えると、3次元クロソイド線分が $k-2$ 本、接続点が $k-2$ 個増えるので、未知数は全体で $7(n+k-3)$ 個、条件式は全体で $7(n+k-3)-4+2k$ 個となる。ここでさらに新たに挿入した各点の座標の値のうち2つ（例えば $x, y$ ）を未知数として扱うとすると、未知数は全体で $7(n+k-3)+2(k-2)$ 個、条件式は全体で $7(n+k-3)+2(k-2)$ 個となり未知数と条件式の数が等しくなる。

[0198] (ii)  $m=2k+1$ のとき

両端であわせて $m=2k+1$ 個の項目を制御するとき、未知数は全体で $7(n-1)$ 個、条件式は全体で $7(n-1)+2k-3$ 個である。このとき過剰な条件式は $2k-3$ 個である。今、 $k-1$ 個の点を新たに挿入することを考えると、3次元クロソイド線分が $k-1$ 本、接続点が $k-1$ 個増えるので、未知数は全体で $7(n+k-2)$ 個、条件式は全体で $7(n+k-2)-3+2k$ 個となる。ここでさらに新たに挿入した各点の座標の値のうち2つ（例えば $x, y$ ）を未知数として扱うとすると、未知数は全体で $7(n+k-2)+2(k-2)$ 個、条件式は全体で $7(n+k-2)+2k-3$ 個となり条件式の数が1つ多くなる。そこで、 $m=2k+1$ の場合には挿入した点のうちひとつの点においては座標の値のうち1つだけを未知数として扱うとする。そうすることで、未知数は全体で $7(n+k-2)+2(k-2)$ 個、条件式は全体で $7(n+k-2)+2(k-2)$ 個となり未知数と条件式の数が等しくなる。

[0199] 以上に述べた方法のように、追加される条件の数に合わせて、挿入した点の座標のうち未知数にする数を調整することで接線、法線、曲率以外の例えば接線回転角 $\alpha$ を制御する場合などの種々の場合でも未知数と条件式の数をあわせることができ、理論上両端点の各値を制御することができる。また、制御項目と未知数、条件式の数についてまとめたものを表4に記す。

[0200] [表4]



n 点の補間における両端での制御項目と未知数、条件式の数

制御したい 項目数	増える 条件式	挿入する 点の数	一点につき 未知数として 扱う座標の数	増える 未知数
4	0	0	0	0
5	1	1	1	1
6	2	1	2	2
7	3	2	1個の点 : 2 1個の点 : 1	3
⋮				
2k	2k-4	k-2	k-2個の点 : 2	2k-4
2k+1	2k-3	k-1	k-2個の点 : 2 1個の点 : 1	2k-3

※k : 2以上の自然数

[0201] (b) 手法

始点・終点で各値を制御する3次元クロソイドを用いた補間法は、図 17 及び図 18 に示されるように以下の流れで行われる。

Step1) 制御する条件のうち4つだけを用いて厳密に補間対象点を通り、かつ  $G^2$  連続な補間を行い曲線を生成する。

Step2) 生成された曲線上に新たな点を挿入し、条件式と未知数の数を調整する。

Step3) Step1の曲線パラメータを初期値として、目的の条件を満たすような各曲線のパラメータの近似値をニュートン・ラプソン法によって求める。

[0202] 以下、各Stepについて説明を補足する。まずStep1においては、接線方向を制御するのであれば、2-3の手法を用いて曲線を生成する。また、接線方向を制御しない場合についても、その曲線のパラメータを求める際の初期値としては、2-3の手法と同じ初期値を用いる。

[0203] 次にStep2において新たな点を挿入し、条件と未知数の数の調整を行うことになる。この際、新たに挿入する点は、各補間対象点間において可能な限り1つ以下になるようにする。また、挿入される点としては補間対象点同士を結

ぶStep1で生成された3次元クロソイド線分の中間の点を挿入した。さらに、挿入される点は両端から順々に挿入していくものとする。つまり、最初に挿入されるのは始点とその隣の点の間と終点とその隣の点の間である。

[0204] 最後にStep3についてであるが、Step3で行うニュートン・ラプソン法のための初期値を新たに決定する必要がある。そのため、新たな点が挿入された曲線については、1-4で述べた3次元クロソイド曲線を分割する手法を用いて曲線を分割し、生成された曲線の各値から決定した。点が挿入されていない曲線については、Step1で生成した曲線の値をそのまま用いる。以上で、Step3における曲線の各パラメータの初期値を決定した。この初期値を用いて、ニュートン・ラプソン法によって得られたパラメータから3次元クロソイド曲線を生成し、点列間を目的の条件を満たすような3次元クロソイド曲線で補間を行った。

[0205] (C) 補間例

実際に両端での接線、法線、曲率を表5の条件で制御するように3次元クロソイド補間した例を示す。厳密に通るべき補間対象の点に通し番号を振り、 $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ とした。

[0206] [表5]

補間対象各点と始点・終点の条件

	座標	単位接線ベクトル	主法線ベクトル	曲率
$P_1$	(0, 0, 0)	$(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$	$(-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$	0.2
$P_2$	(4, -4, -4)	—	—	—
$P_3$	(8, -4, -5)	(1, 0, 0)	(0, -1, 0)	0.2

$$* \theta = -\frac{\pi}{6} \text{とする}$$

[0207] この条件で、実際に補間を行った結果を図19に示す。実線の曲線が3次元クロソイド曲線、破線・一点鎖線・二点鎖線・三点鎖線は各曲線の曲率半径変化パターンを示している。また、図20に図19の曲線の線種に対応さ

せた各曲線の始点からの移動距離と曲率の関係のグラフを記す。生成された曲線は、表 6 からわかるように与えた条件を満たしていることがわかる。

[0208] [表6]

与えた値と生成された曲線の始点・終点の接線、法線、曲率の差

		座標	単位接線ベクトル	主法線ベクトル	曲率
P <sub>1</sub>	与えた値	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.8660, -0.5, 0.0}	{0.5, 0.8660, 0.0}	0.20
	生成曲線による値	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.8660, -0.5, 0.0}	{0.5000, 0.8660, 0.0}	0.20
	差	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	0
P <sub>3</sub>	与えた値	{8.0, -4.0, -5.0}	{1.0, 0.0, 0.0}	{0.0, -1.0, 0.0}	0.20
	生成曲線による値	{8.0, -4.0, -5.0}	{1.0, 0.0, 0.0}	{0.0, -1.0, 0.0}	0.20
	差	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	0

[0209] (d) 中間点での値の制御

(b) の手法により、両端点における各値を制御しつつ、 $G^2$  連続な補間が行えるようになった。ここで、両端点でなく中間点において値を制御する場合について考える。

[0210] 例えば図 2-1 のような点列を補間する場合において、中間点  $P_0$  で接線、法線を制御することを考える。しかし、今まで述べてきた手法では中間点における値を制御することはできない。そこで、ここではこの点列を 2 つに分けることによって中間点での値を制御した。

[0211] すなわち、点列に対して一挙に補間を行うのではなく、中間点  $P_0$  を挟んで曲線  $C_1$  と  $C_2$  とに分けて補間を行う。その場合点  $P_0$  は、端点にあたることになるので (b) の手法を用いれば値を制御することができるようになる。

[0212] このように制御したい値のある点で区分を分け、その両端における値を制御して補間した結果生成される曲線を繋いでいけば、理論上、各点において接線・法線・曲率の制御可能な 3 次元クロソイド補間を行うことができる。

[0213] (2-5) 両端点での接線、法線、曲率を制御した 3 次元クロソイド補間

[0214] (a) 手法の流れ

始点・終点で各値を制御する3次元クロソイドを用いた補間法は、図22に示される以下の流れで行われる。以後、この流れに沿って説明する。

[0215] (b-1) 補間対象の点を与える。

この例では3次元空間の3点  $\{0.0, 0.0, 0.0\}$ ,  $\{5.0, 5.0, 10.0\}$ ,  $\{10.0, 10.0, 5.0\}$  を与えた。その他各点に与えた接線、法線、曲率などの条件をまとめて表7に記した。

[0216] [表7]

補間対象各点と始点・終点の条件

	座標	単位接線ベクトル	主法線ベクトル	曲率
$P_1$	$(0.0, 0.0, 0.0)$	$\{0.0, 1.0, 0.0\}$	$\{1.0, 0.0, 0.0\}$	0.1
$P_2$	$(5.0, 5.0, 10.0)$	—	—	—
$P_3$	$(10.0, 10.0, 5.0)$	$\{1.0, 0.0, 0.0\}$	$\{0.0, -1.0, 0.0\}$	0.1

[0217] (b-2)  $r=4$ の3DDCSの生成

ニュートン・ラプソン法においては、解の探索を始める際に適当な初期値を与える必要がある。ここではその初期値を得るための準備をする。先行研究である3D Discrete Clothoid Splinesは、厳密に補間対象点を通り、曲率が始点からの移動距離に対して滑らかに変化するような性質を持っている。そこで、本研究では3次元クロソイド補間のための初期値を、図23のような  $r=4$ の3D Discrete Clothoid SplinesのポリゴンQを作り、そこから計算で決定した。また、実際にこの点列より生成されたポリゴンを図24に、頂点の座標を表8に載せた。

[0218] [表8]

生成されたポリゴンの頂点の座標

	頂点の座標
P <sub>1</sub>	{0.0, 0.0, 0.0}
	{0.4677, 0.4677, 3.1228}
	{0.9354, 0.9354, 6.2456}
	{2.3029, 2.3029, 9.4966}
P <sub>2</sub>	{5.0, 5.0, 10.0}
	{6.7095, 6.7095, 9.9244}
	{8.0655, 8.0655, 8.4732}
	{9.0327, 9.0327, 6.7366}
P <sub>3</sub>	{10.0, 10.0, 5.0}

[0219] (b-3) 初期値の決定

ニュートン・ラプソン法で解を求めるには、各未知数の初期値を決定する必要がある。本手法ではその値をb-2で生成したポリゴンQを使って、各未知数の近似値を求めて決定する。3D Discrete Clothoid Splinesでは各頂点のフレネ標構がすでに求まっている。そこで、b-2で生成したポリゴンQの単位接線方向ベクトル $t$ よりパラメータ $a_0$ ,  $b_0$ を求める。この接線方向ベクトル $t$ はポリゴンQを求めたときにすでに既知となっており、この $t$ と3次元クロソイド曲線の接線の式とにより、ポリゴンQの頂点の接線方向回転角 $\alpha$ ,  $\beta$ が求まる。これにより各曲線の $a_0$ ,  $b_0$ の初期値が求まる。また、始点から始まる3次元クロソイドセグメントにおいては、その値を与える。

[0220] [数59]

$$u = \begin{Bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{Bmatrix}$$

[0221] ここで、3D Discrete Clothoid Splinesは、頂点が等距離に並んでいることを考えると、図23の点 $q_{4i+1}$ では、曲線長変数 $S$ が $1/4$ であると近似することができる。同様に点 $q_{4(i+1)-1}$ では、曲線長変数 $S$ が $3/4$ であると近似することができる。これらを3次元クロソイド曲線の $\alpha$ の式とをあわせて考慮すると下記の式が成り立つ。

[0222] [数60]

$$\begin{cases} a0_{4i} + \frac{1}{4}a1_{4i} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a2_{4i} = a0_{4i+1} \\ a0_{4i} + \frac{3}{4}a1_{4i} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 a2_{4i} = a0_{4(i+1)-1} \end{cases}$$

この式は未知数が $a1_{4i}$ と $a2_{4i}$ の2次元連立方程式になっており、これを解いてパラメータ $a_1$ 、 $a_2$ の初期値とする。同様にパラメータ $b_1$ 、 $b_2$ の初期値も決定できる。

[0223] 残る未知数は曲線長 $h$ であるが、この初期値については3次元クロソイド曲線の曲率の式より算出する。3次元クロソイド曲線の曲率は、下記で表される。

[数61]

$$\kappa = \frac{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 \cos^2 \alpha}}{h}$$

[0224] この式を変形すると以下の式になり、 $h$ の初期値が決定される。

[数62]

$$h_{4i} = \frac{\sqrt{(a1_{4i} + 2a2_{4i})^2 + (b1_{4i} + 2b2_{4i})^2 \cos^2 (a0_{4i} + a1_{4i} + a2_{4i})}}{\kappa_{4(i+1)}}$$

[0225] 以上の方法で7つの3次元クロソイドパラメータについて初期値を決定する

ことができる。

[0226] 実際にこの手法により求めた初期値を表9に記す。

[表9]

初期値

点 $P_1$ と $P_2$ と を結ぶ曲線	$a_0$	0.0 (既知)
	$a_1$	-0.2684
	$a_2$	1.0739
	$b_0$	$\pi/2$ (既知)
	$b_1$	0.0
	$b_2$	0.0
	$h$	12.7684
点 $P_2$ と $P_3$ と を結ぶ曲線	$a_0$	-0.1648
	$a_1$	3.2061
	$a_2$	-2.6327
	$b_0$	0.7853
	$b_1$	0.0
	$b_2$	0.0
	$h$	9.6752

[0227] (b-4) . 厳密に各点を通り、 $G^2$ 連続な3次元クロソイド補間

(b-3)で決定した初期値を用いて $G^2$ 連続となるような条件下で各曲線のパラメータの近似値をニュートン・ラプソン法によって求める。これによって得られたパラメータから3次元クロソイドセグメントを生成し、点列間を3次元クロソイド曲線で補間することを行った。

[0228] ここで、3点の3次元クロソイド補間において、厳密に補間対象の点を通り

、かつ $G^2$ 連続となるような条件について具体的な条件を考える。図25は点 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ の3次元クロソイド補間を示す。点 $P_1$ 、 $P_2$ 間を結ぶ曲線を曲線 $C_1$ 、点 $P_2$ 、 $P_3$ 間を結ぶ曲線を曲線 $C_2$ とすると、 $a_0$ と $b_0$ は既に既知であるから、未知数は、曲線 $C_1$ のパラメータ $a_1$ 、 $a_2$ 、 $b_1$ 、 $b_2$ 、 $h$ 、曲線 $C_2$ のパラメータ $a_0$ 、 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $b_0$ 、 $b_1$ 、 $b_2$ 、 $h$ の12個となる。以後説明にでてくる文字のサブスクリプトは各曲線のサブスクリプトに対応しており、各曲線における座標、接線回転角 $\alpha$ 、 $\beta$ 、法線、曲率を曲線長変数 $S$ の関数として $Px_i$ 、 $Py_i$ 、 $Pz_i$ 、 $\alpha_i$ 、 $\beta_i$ 、 $n$

$i$ ,  $\kappa_i$  のように表す。

[0229] まず、点 $P_1$ においては厳密に補間対象の点を通るという条件は3次元クロソイド曲線の定義から考えると、始点を与えた時点で必然的に達成される。また接線方向についても既に既知な値として与えるので点 $P_1$ における条件は特に指定しない。

[0230] 次に点 $P_2$ について考える。点 $P_2$ は曲線同士の接続点であり、 $G^2$ 連続になるには位置、接線、法線、曲率が連続する必要がある。つまり点 $P_2$ において成り立つべき条件は下記のようなになる。

[0231] [数63]

$$\begin{aligned} P_{x_1}(1) &= P_{x_2}(0) \\ P_{y_1}(1) &= P_{y_2}(0) \\ P_{z_1}(1) &= P_{z_2}(0) \\ \cos[\alpha_1(1) - \alpha_2(0)] &= 1 \\ \cos[\beta_1(1) - \beta_2(0)] &= 1 \\ n_1(1) \cdot n_2(0) &= 1 \\ \kappa_1(1) &= \kappa_2(0) \end{aligned}$$

[0232] 最後に点 $P_3$ について考える。点 $P_3$ は終点であり、満たすべき条件は位置、接線のみであるので以下の5つの条件が成り立つ。ここで $\alpha_3$ 、 $\beta_3$ は、与える終点における接線ベクトルを決める接線方向回転角 $\alpha$ 、 $\beta$ であるとする。

[0233] [数64]

$$\begin{aligned} P_{x_2}(1) &= P_{x_3} \\ P_{y_2}(1) &= P_{y_3} \\ P_{z_2}(1) &= P_{z_3} \\ \cos[\alpha_2(1) - \alpha_3] &= 1 \\ \cos[\beta_2(1) - \beta_3] &= 1 \end{aligned}$$

[0234] 以上より、未知数 $a1_1$ ,  $a2_1$ ,  $b1_1$ ,  $b2_1$ ,  $h_1$ ,  $a0_2$ ,  $a1_2$ ,  $a2_2$ ,  $b0_2$ ,  $b1_2$ ,  $b2_2$ ,  $h_2$  の12個に対して、条件式は下記の12個が成り立つことがわかる。まとめると



成り立つ条件式は下記のようになる。

[0235] [数65]

$$Px_1(1) = Px_2(0)$$

$$Py_1(1) = Py_2(0)$$

$$Pz_1(1) = Pz_2(0)$$

$$\cos[\alpha_1(1) - \alpha_2(0)] = 1$$

$$\cos[\beta_1(1) - \beta_2(0)] = 1$$

$$n_1 \cdot n_2 = 1$$

$$\kappa_1(1) = \kappa_2(0)$$

$$Px_2(1) = Px_3$$

$$Py_2(1) = Py_3$$

$$Pz_2(1) = Pz_3$$

$$\cos[\alpha_2(1) - \alpha_3] = 1$$

$$\cos[\beta_2(1) - \beta_3] = 1$$

[0236] これで未知数12個について12個の式が成り立つので解を求めることができる。この式をニュートン・ラブソン法によって解き、解を求めた。表10に初期値と解を記す。

[0237] [表10]

## 初期値と解

		初期値	解
点 $P_1$ と $P_2$ とを 結ぶ曲線 $C_1$	$a_0$	0.0 (既知)	—
	$a_1$	-0.2684	-5.4455
	$a_2$	1.0739	5.4122
	$b_0$	$\pi/2$ (既知)	—
	$b_1$	0.0	-3.8590
	$b_2$	0.0	3.1003
	$h$	12.7684	13.5862
点 $P_2$ と $P_3$ とを 結ぶ曲線 $C_2$	$a_0$	-0.1648	-0.033258
	$a_1$	3.2061	3.6770
	$a_2$	-2.6327	-3.6437
	$b_0$	0.7853	0.8120
	$b_1$	0.0	1.6006
	$b_2$	0.0	-2.4126
	$h$	9.6752	9.2873

## [0238] (b-5). 曲線の生成

図26は(b-4)で求めたパラメータを元に生成した曲線とb-2で生成したポリゴンとを同時に表示したものである。実線の曲線が曲線 $C_1$ 、破線の曲線が曲線 $C_2$ である。この段階では始点・終点で接線方向を制御したG2連続な3次元クロソイド曲線になっている。

## [0239] (b-6). 条件式と未知数

ここで、さらに始点 $P_1$ と終点 $P_3$ における法線と曲率も表7で与えた値にすることを考える。始点・終点でさらに法線と曲率を制御するには、始点と終点における条件をそれぞれ2つ増やす必要がある。しかし、条件が4つ増えた状態では未知数の数との関係からその条件を満たす解を求めることが出来ない。そこで、未知数と条件式の数を合わせるために、図27に示されるように曲線 $C_1$ の曲線長変数 $S=0.5$ の位置に点 $DP_1$ を新たに挿入した。また、曲線 $C_2$ についても曲線長変数 $S=0.5$ の位置に点 $DP_2$ を新たに挿入した。

[0240] このとき、点 $P_1$ と点 $DP_1$ を結ぶ曲線を曲線 $C'_1$ 、点 $DP_1$ と点 $P_2$ を結ぶ曲線を曲線 $C'_2$ 、点 $P_2$ と点 $DP_2$ を結ぶ曲線を曲線 $C'_3$ 、点 $DP_2$ と点 $P_3$ を結ぶ曲線を曲線 $C'_4$ と

する。以後説明にでてくる文字のサブスクリプトは各曲線名に対応しており、例えば曲線Cにおける座標、接線回転角 $\alpha$ 、 $\beta$ 、法線、曲率を曲線長変数Sの関数として $Px_c, Py_c, Pz_c, \alpha_c, \beta_c, n_c, \kappa_c$ のように表す。また、始点・終点においては、座標、接線回転角 $\alpha$ 、 $\beta$ 、法線、曲率を始点では $Px_s, Py_s, Pz_s, \alpha_s, \beta_s, n_s, \kappa_s$ 、終点では $Px_e, Py_e, Pz_e, \alpha_e, \beta_e, n_e, \kappa_e$ のように表す。

[0241] 以下に各点において成り立つ条件を記す。

[数66]

点  $P_1$  : 接線、法線、曲率 : 4 個

$$\cos[\alpha_{C'1}(0) - \alpha_s] = 1$$

$$\cos[\beta_{C'1}(0) - \beta_s] = 1$$

$$n_{C'1}(0) \cdot n_s = 1$$

$$\kappa_{C'1}(0) = \kappa_s$$

点  $DP_1$  : 位置、接線、法線、曲率 : 7 個

$$Px_{C'1}(1) = Px_{C'2}(0)$$

$$Py_{C'1}(1) = Py_{C'2}(0)$$

$$Pz_{C'1}(1) = Pz_{C'2}(0)$$

$$\cos[\alpha_{C'1}(1) - \alpha_{C'2}(0)] = 1$$

$$\cos[\beta_{C'1}(1) - \beta_{C'2}(0)] = 1$$

$$n_{C'1}(1) \cdot n_{C'2}(0) = 1$$

$$\kappa_{C'1}(1) = \kappa_{C'2}(0)$$

点  $P_2$  : 位置、接線、法線、曲率 : 7 個

$$Px_{C'2}(1) = Px_{C'3}(0)$$

$$Py_{C'2}(1) = Py_{C'3}(0)$$

$$Pz_{C'2}(1) = Pz_{C'3}(0)$$

$$\cos[\alpha_{C'2}(1) - \alpha_{C'3}(0)] = 1$$

$$\cos[\beta_{C'2}(1) - \beta_{C'3}(0)] = 1$$

$$n_{C'2}(1) \cdot n_{C'3}(0) = 1$$

$$\kappa_{C'2}(1) = \kappa_{C'3}(0)$$

点  $DP_2$  : 位置、接線、法線、曲率 : 7 個

$$Px_{C'3}(1) = Px_{C'4}(0)$$

$$Py_{C'3}(1) = Py_{C'4}(0)$$

$$Pz_{C'3}(1) = Pz_{C'4}(0)$$

$$\cos[\alpha_{C'3}(1) - \alpha_{C'4}(0)] = 1$$

$$\cos[\beta_{C'3}(1) - \beta_{C'4}(0)] = 1$$

$$n_{C'3}(1) \cdot n_{C'4}(0) = 1$$

$$\kappa_{C'3}(1) = \kappa_{C'4}(0)$$

点  $P_3$  : 位置、接線、法線、曲率 : 7 個

$$Px_{C'4}(1) = Px_e$$

$$Py_{C'4}(1) = Py_e$$

$$Pz_{C'4}(1) = Pz_e$$

$$\cos[\alpha_{C'4}(1) - \alpha_e] = 1$$

$$\cos[\beta_{C'4}(1) - \beta_e] = 1$$

$$n_{C'4}(1) \cdot n_e = 1$$

$$\kappa_{C'4}(1) = \kappa_e$$

[0242] 以上より、全体で成り立つべき条件式は 32 個である。ここで、各曲線が持つクロソイドパラメータは  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h$  の 7 つずつであり、かつ、曲線が 4 本なので未知数は 28 個となる。しかし、これでは未知数と条件式の数が等しくないので、解を求めることが出来ない。そこで新たに挿入した 2 つの点  $DP_1, DP_2$  の  $y, z$  座標を未知数として扱い、未知数を 4 つ増やした。こうすることで未知数も条件式も 32 個となり、解を求めることができる。

[0243] (b-7). 初期値の決定

(b-6) で立てた条件式を満たす解を求めるためにニュートン・ラプソン法を用いるが、その収束率を上げるために未知数の初期値を決定する。方法としては、図 28 のように (b-5) で生成した 3 次元クロソイド曲線を新しく挿入した点の前後で分割することにより、3 次元クロソイド曲線を 4 本作り、そのクロソイドパラメータを与えた。

[0244] 曲線の分割法については、曲線  $C_1$  を曲線  $C'_1$  と曲線  $C'_2$  とに分割する方法を説

明すると、曲線 $C'_1$ のクロソイドパラメータ $h'$ ,  $a'_0$ ,  $a'_1$ ,  $a'_2$ ,  $b'_0$ ,  $b'_1$ ,  $b'_2$ は、曲線 $C_1$ のパラメータを用いて、下記の式で表せる。ここで $S_d$ は分割点における曲線長変数でここでは0.5である。

[0245] [数67]

$$\begin{cases} a'_0 = a_0 \\ a'_1 = a_1 S_d \\ a'_2 = a_2 S_d^2 \\ b'_0 = b_0 \\ b'_1 = b_1 S_d \\ b'_2 = b_2 S_d^2 \\ h' = h S_d \end{cases}$$

[0246] 次に分割点 $DP_1$ を始点とする曲線 $C'_2$ について考える。まず、曲線 $C_1$ と大きさ、形状が同じで向きが逆な曲線を曲線 $C''_1$ とすると、その曲線はのクロソイドパラメータ $h''$ ,  $a''_0$ ,  $a''_1$ ,  $a''_2$ ,  $b''_0$ ,  $b''_1$ ,  $b''_2$ は、曲線 $C_1$ の曲線のパラメータを用いて、下記の式で表せる。

[0247] [数68]

$$\begin{cases} P''_s = P(1) \\ a''_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \pi \\ a''_1 = -(a_1 + 2a_2) \\ a''_2 = a_2 \\ b''_0 = b_0 + b_1 + b_2 \\ b''_1 = -(b_1 + 2b_2) \\ b''_2 = b_2 \\ h'' = h \end{cases}$$

[0248] この曲線上において分割点 $DP_1$ は、 $DP_1 = C''_1(1 - S_d)$ で表される。ここで曲線 $C''_1$ を点 $DP_1$ で分割することを考えると、その分割された曲線のうち点 $P_2$ を始点

とする曲線 $C'_2$ は、曲線 $C_2$ と大きさ、形状が同じで向きが逆な曲線になっている。曲線 $C'_1$ を生成した方法により曲線 $C'_2$ は、生成することができる。ここで、さらに曲線 $C'_2$ に対して大きさ、形状が同じで向きが逆な曲線を生成すれば、曲線 $C_2$ は生成することができる。

[0249] 以上の方法で、3次元クロソイド曲線 $C_1$ 上の曲線長変数が $S=0.5$ である点 $DP_1$ で曲線 $C_1$ を曲線 $C'_1$ と $C'_2$ とに分割することができる。同様の手法で、曲線 $C_2$ 上の曲線長変数が $S=0.5$ である点 $DP_2$ で曲線 $C_2$ を曲線 $C'_3$ と $C'_4$ とに分割することができる。

[0250] この方法で分割した4つの曲線のパラメータを表11に載せた。この曲線のパラメータをb-6で立てた条件式を満たす解を求める際のニュートン・ラプソン法の初期値に用いた。

[0251] [表11]

分割により生成された曲線のパラメータ

曲線 $C'_1$	$a_0$	0.0 (既知)	曲線 $C'_2$	$a_0$	4.9134
	$a_1$	-2.7227		$a_1$	-0.016629
	$a_2$	1.3530		$a_2$	1.3530
	$b_0$	$\pi/2$ (既知)		$b_0$	0.41633
	$b_1$	-1.9295		$b_1$	-0.37938
	$b_2$	0.7750		$b_2$	0.77507
	$h$	6.7931		$h$	6.7931
	始点	{0.0, 0.0, 0.0}		始点	{1.8431, 3.0860, 4.9597}
曲線 $C'_3$	$a_0$	-0.033258	曲線 $C'_4$	$a_0$	7.1774
	$a_1$	1.8385		$a_1$	0.016629
	$a_2$	-0.91093		$a_2$	-0.91093
	$b_0$	0.81202		$b_0$	1.0091
	$b_1$	0.80031		$b_1$	-0.40601
	$b_2$	-0.60316		$b_2$	-0.60316
	$h$	4.6436		$h$	4.6436
	始点	{5.0, 5.0, 10.0}		始点	{7.0029, 8.1298, 7.5337}

[0252] (b-8) . 条件を満たすクロソイドパラメータを求める

(b-7) で決定した初期値を元に、(b-6) で立てた条件式を満たす解をニュートン・ラプソン法で求めた。表 1 2 は算出された各曲線のパラメータである。また、表 1 3 は与えた値と生成された曲線の始点・終点の接線、法線、曲率の差を示したものである。

[0253] [表12]

生成された曲線のパラメータ

曲線 $C'_1$	$a_0$	0.0 (既知)	曲線 $C'_2$	$a_0$	5.3846
	$a_1$	0.0000		$a_1$	-3.4602
	$a_2$	-0.89854		$a_2$	4.341
	$b_0$	$\pi/2$ (既知)		$b_0$	0.47690
	$b_1$	-0.51836		$b_1$	-3.2143
	$b_2$	-0.57552		$b_2$	3.4613
	$h$	5.1836		$h$	9.9808
	始点	{0.0, 0.0, 0.0}		始点	{1.8431, 4.1726, 1.4653}
曲線 $C'_3$	$a_0$	-0.017740	曲線 $C'_4$	$a_0$	6.8553
	$a_1$	3.4572		$a_1$	-1.1443
	$a_2$	-2.8673		$a_2$	0.57219
	$b_0$	0.72385		$b_0$	0.76315
	$b_1$	2.4551		$b_1$	-1.1942
	$b_2$	-2.4158		$b_2$	0.43108
	$h$	6.60818		$h$	3.3206
	始点	{5.0, 5.0, 10.0}		始点	{7.0029, 9.0734, 5.6186}

[0254] [表13]

与えた値と生成された曲線の始点・終点の接線、法線、曲率の差

		座標	単位接線ベクトル	主法線ベクトル	曲率
$P_1$	与えた値	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 1.0, 0.0}	{1.0, 0.0, 0.0}	0.10
	生成曲線による値	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 1.0, 0.0}	{1.0, 0.0, 0.0}	0.10
	差	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	0
$P_3$	与えた値	{10.0, 10.0, 5.0}	{1.0, 0.0, 0.0}	{0.0, -1.0, 0.0}	0.10
	生成曲線による値	{10.0, 10.0, 5.0}	{1.0, 0.0, 0.0}	{0.0, -1.0, 0.0}	0.10
	差	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	0

#### [0255] (b-9). 曲線の生成

(b-8)で求めたパラメータにより生成された曲線を図29に示す。実線が3次元クロソイド曲線、破線・一点鎖線・二点鎖線・三点鎖線は各曲線の方角を主法線方向に、大きさを曲率半径に自然対数を足して対数を取った曲率半径変化パターンを示している。また、図30に図29の線の種類に対応させた各曲線の始点からの移動距離 $s$ と曲率 $\kappa$ の関係のグラフを記す。生成された曲線は、表12からわかるように与えた条件を満たしていることがわかる。

[0256] 以上で、両端で接線、法線、曲率を制御した3次元クロソイド補間法による曲線生成の例を記した。

#### [0257] 3. 3次元クロソイド補間を用いたボールねじの回帰経路の設計方法

3次元クロソイド曲線の機械設計への応用事例として、デフレクタータイプのボールねじの回帰経路の設計を行う。

##### [0258] (3-1) デフレクタータイプのボールねじの説明

図31乃至図35はデフレクタータイプのボールねじを示す。デフレクタはねじ溝を転がるボールの回帰経路を構成する。デフレクタには、ナットと別体で形成された後、ナットに固定されるタイプと、ナットに一体に形成されるタイプのものがある。図31はデフレクタがナットと別体のタイプを示す。



す。

[0259] 以下にデフレクタがナットと一体のタイプのボールねじについて説明する。図32は、デフレクタがナットと一体のタイプのボールねじのナット1を示す。ナット1の内周面には、一周未満の螺旋状の負荷転動体転走溝として、負荷ボール転走溝2が形成される。負荷ボール転走溝2は後述するねじ軸のボール転走溝に一致させたリードを有する。回帰経路としてのボール循環溝3は、負荷転走溝の一端と他端を接続し、負荷ボール転走溝2と逆方向のリードを有する。これら負荷ボール転走溝2及びボール循環溝3で一つの一巻き溝4を構成する。図33Aはボール循環溝3が見える状態のナット1の斜視図を示し、図33Bは負荷ボール転走溝2が見える状態のナット1の斜視図を示す。

[0260] このナット1をねじ軸に組み合わせた状態を示すのが図34である。

[0261] ねじ軸5の外周面には、所定のリードを有する螺旋状の転動体転走溝として、ボール転走溝6が形成されている。ナット1の負荷ボール転走溝2は、ねじ軸5のボール転走溝6に対向する。ナット1の負荷ボール転走溝2及びボール循環溝3とねじ軸5のボール転走溝6との間には、転がり運動可能な複数の転動体として、複数のボールが配列される。ナット1がねじ軸5に対して相対的に回転するのに伴い、複数のボールがナット1の負荷ボール転走溝2とねじ軸5のボール転走溝6との間で負荷を受けながら転がり運動する。

[0262] 図32に示されるナット1のボール循環溝3が図31に示されるデフレクタに対応する部分である。ボール循環溝3は、ねじ軸5の負荷ボール転走溝2を転がるボールがねじ軸5の周囲を一巡して元の負荷ボール転走溝に戻るように、ボールをねじ軸5のねじ山7を乗り越えさせる。

[0263] 従来のモデルの循環経路は図35の展開図をねじ軸に巻きつけたときに、経路をねじ山とボールがぶつからぬ程度にねじ軸中心から離すことで作られているが、この経路は図36の曲率変化を見てわかる通り、曲率不連続である。そこで3次元クロソイド補間を用いて循環経路を曲率連続な経路に再設

計する。

[0264] 図37はボール中心の軌道を示す。ボールの循環経路が全体として $G^2$ 連続になるようにするには、ボールが回帰経路に移る点において $G^2$ 連続となる必要がある。このため回帰経路の設計にあたって、回帰経路の両端点で接線、法線、曲率を制御する必要性があることを考慮した。

[0265] (3-2) 以下に、3次元クロソイド曲線を用いてデフレクタータイプのボールねじの回帰経路を設計した例を記す。

[0266] (a-1). ねじ軸とボール

本設計において用いたねじ軸とボールの寸法を表14に記す。

[0267] [表14]

ねじ軸とボールの寸法

ねじ軸外径 (mm)	28.0
ボール中心径 (mm)	28.0
谷径 (mm)	24.825
ピッチ (mm)	5.6
ボール径 (mm)	3.175

[0268] (a-2). 対称性と座標系

デフレクタータイプのボールねじの回帰経路は、その使用用途から軸対称である必要がある。そこで本設計で用いた座標系について説明する。

[0269] まず、図38のようにz軸をねじ軸方向に取る。図38の実線はねじ溝にそってボールを動かしたときにボールの中心が描く軌道である。また、回帰経路に入る点を点 $P_s$ 、回帰経路からねじ溝に戻る点を点 $P_e$ とし、点 $P_s$ と点 $P_e$ との中点を点 $P_m$ とした。点 $P_s$ と点 $P_e$ は図39のようにxy平面への投影図で見ると、原点O、点 $P_s$ と点 $P_e$ で二等辺三角形を作るが、この二等辺三角形の $\angle P_s O P_e$ の垂直二等分線の方をy軸方向と取る。さらに対称性から考えて、y軸は点 $P_m$ を通るとした。各軸の方向については図38、39のとおりである。このように座標系をとり、y軸対称となるように回帰経路を設計する。

[0270] 実際に設計したときには  $\theta = 15^\circ$  として各点の座標を決定した。それにより決定された座標、接線、法線、曲率を表 15 に記す。

[0271] [表15]

各点の座標と接線、法線、曲率

	座標	接線	法線	曲率
点P <sub>s</sub>	{-3.6088, -13.5249, 2.5563}	{0.96397, -0.25829, 0.063533}	{0.25881, 0.96592, 0.0}	0.071428
点P <sub>e</sub>	{3.6088, -13.5249, -2.5563}	{0.96397, 0.25829, 0.063533}	{-0.25881, 0.96592, 0.0}	0.071428
点P <sub>m</sub>	{0.0, -13.5249, 0.0}	—	—	—

## [0272] (a-3). 拘束条件

デフレクタータイプのボールねじの回帰経路の設計における拘束条件について考える。まず、点 $P_s$ と点 $P_s$ においてはねじ溝を移動するボールの中心の軌跡が描く曲線と $G^2$ 連続である必要がある。

[0273] 次に、ボールを挙げる高さについて考えると、回帰経路が $y$ 軸対称であることを考慮すればボールの中心は $y$ 軸上のある点を通るので、この点を点 $P_h$ とする（図38, 39参照）。このとき、ボールがねじ山を飛び越えるのには、点 $P_h$ の $y$ 座標の絶対値が少なくとも

$$(\text{点}P_h\text{の}y\text{座標の絶対値}) \geq (\text{ねじ軸外径} + \text{ボール径}) / 2$$

を満たす必要がある。そこで本設計においては

$$(\text{点}P_h\text{の}y\text{座標の絶対値}) = (\text{ねじ軸外径} + \text{ボール径} \times 1.2) / 2$$

であるとした。また $y$ 軸対称であることを考えるとにおける法線方向は $\{0, 1, 0\}$ である必要があり、接線方向はその回りを回転する自由度しか持たない。

[0274] 以上の条件を満たし、 $y$ 軸対称な回帰経路を3次元クロソイド曲線で生成する。実際には、これに加えてねじ軸との干渉について考えなくてはならないが、干渉については設計した回帰経路を検査し、干渉している場合は補間の初期値を変えたり、補間対象点を増やしたりして、経路を設計しなおすことにより、満たすこととした。

## [0275] (a-4). 干渉をさけるために

ねじ軸との干渉は、回帰経路に入った辺りで起こりやすく、自由な補間により経路を作ったのでは干渉が起こりやすくなっている。回帰経路は、ねじ軸から離すこととねじ山を超えて元の位置に戻すことが要求されているが、干渉を避けるにはある程度ねじ軸から離してから、ねじ山を超えて元の位置に戻す方が望ましい。この回帰経路を生成する方法としては、補間対象点を増やし、干渉を避ける方法と回帰経路に入った1本目の曲線を手動で生成し強制的にねじ軸から離してやる手法がある。このうち本設計では、回帰経路に入った1本目の曲線を手動で生成し強制的にねじ軸から離してやる手法を用

いた。

- [0276] ここで、点 $P_s$ から始まる回帰経路に入った1本目の曲線 $C_1$ について述べる。曲線 $C_1$ における座標、接線回転角 $\alpha$ 、 $\beta$ 、法線、曲率を曲線長変数 $S$ の関数として $Px_1(S)$ ,  $Py_1(S)$ ,  $Pz_1(S)$ ,  $\alpha_1(S)$ ,  $\beta_1(S)$ ,  $n_1(S)$ ,  $\kappa_1(S)$ のように、また、点 $P_s$ ・点 $P_h$ においては、座標、接線回転角 $\alpha$ 、 $\beta$ 、法線、曲率を点 $P_s$ では $Px_s$ ,  $Py_s$ ,  $Pz_s$ ,  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$ ,  $n_s$ ,  $\kappa_s$ 、点 $P_h$ では $Px_h$ ,  $Py_h$ ,  $Pz_h$ ,  $\alpha_h$ ,  $\beta_h$ ,  $n_h$ ,  $h_d$ のように表す。ねじ溝を移動するボールの中心の軌跡が描く曲線と $G^2$ 連続である条件は、点 $P_s$ において下記が成り立つことである。

- [0277] [数69]

点  $P_s$ : 接線、法線、曲率 : 4 個

$$\cos[\alpha_1(0) - \alpha_s] = 1$$

$$\cos[\beta_1(0) - \beta_s] = 1$$

$$n_1(0) \cdot n_s = 1$$

$$\kappa_1(0) = \kappa_s$$

- [0278] また、ねじ溝を移動するボールの中心の軌跡が描く曲線は、3次元クロソイド曲線を用いて表せるが、図40に記すような点から始まり、一巻分の長さの3次元クロソイド曲線 $C_0$ の式は下記の式で表せる。ここで、ねじのピッチを $pit$ 、ねじ軸外形を $R$ 、ねじのピッチ角を $\alpha_0$ とした。

- [0279] [数70]

$$\alpha_0(S) = -\alpha_0$$

$$\beta_0(S) = \beta_e + 2\pi S$$

$$h_0 = \sqrt{pit^2 + (2\pi R)^2}$$

$$P_0(S) = P_e + h_0 \int_0^1 u(S) dS$$

- [0280] 曲線 $C_0$ の式では点 $P_s$ は、 $P_s = P_0(11/12)$ と表せる。今、点 $P_s$ から始まり点 $P_s$ で曲線 $C_0$ と $G^2$ 連続となるような曲線 $C_1$ として下記のようなパラメータを持つ曲線を生成するなら、強制的にねじ軸から離してやることことができる。

[0281] [数71]

$$\begin{cases} \alpha_1(S) = -\alpha_0 \\ \beta_1(S) = \beta_0 \left( \frac{\pi}{12} \right) + \frac{1}{60} \left( b_{10} + \frac{11}{6} b_{20} \right) S - \frac{1}{15} \left( b_{10} + \frac{11}{6} b_{20} \right) S^2 \\ P_1(S) = P_s + \frac{h_0}{60} \int_0^1 u_1(S) dS \end{cases}$$

[0282] 例えば、この条件を満たす曲線 $C_1$ として、表 16 のパラメータを持つ 3 次元クロソイド曲線を生成する。

[0283] [表16]

曲線 $C_1$ のパラメータ

曲線 $C_1$	$a_0$	6.2196
	$a_1$	0.0
	$a_2$	0.0
	$b_0$	6.0213
	$b_1$	0.10472
	$b_2$	-0.41887
	$h$	1.4631
	始点	{-3.6088, -13.5249, 2.5563}

[0284] このとき、点 $P_s$ における曲線 $C_0$ と曲線 $C_1$ の接線、法線、曲率の値を比較してみると表 17 のようになっており、 $G^2$ 連続となっていることが判る。

[0285] [表17]

点 $P_s$ での接線、法線、曲率のずれ

	座標	単位接線ベクトル	主法線ベクトル	曲率
曲線 $C_0$	{-3.6088, -13.5249, 2.5563}	{0.96397, -0.25829, 0.063533}	{0.25881, 0.96592, 0.0}	0.071428
曲線 $C_1$	{-3.6088, -13.5249, 2.5563}	{0.96397, -0.25829, 0.063533}	{0.25881, 0.96592, 0.0}	0.071428
差	{0.000, 0.000, 0.000}	{0.000, 0.000, 0.000}	{0.000, 0.000, 0.000}	0



[0286] また、この曲線は図 4 1, 4 2 を見て判る通り単にねじ軸から離すような形状になっていることがわかる。そこで、点  $P_s$  から始まる回帰経路に入った 1 本目の曲線  $C_1$  についてはこのパラメータの曲線を用いた。

[0287] (a-5). 3次元クロソイド補間の条件式と未知数

a-3で述べた条件を加味して、 $G^2$ 連続となるような条件下で各曲線のパラメータの近似値をニュートン・ラプソン法によって求める。ここですでに点  $P_s$  から始まる曲線  $C_1$  が生成されているので、以後、説明において曲線の  $C_1$  の終点  $P_1$  と点  $P_h$  間の経路の設計を述べる。説明にでてくる文字のサブスクリプトは各曲線のサブスクリプトに対応しており、各曲線における座標、接線回転角  $\alpha$ 、 $\beta$ 、法線、曲率を曲線長変数  $S$  の関数として  $Px_i(S)$ ,  $Py_i(S)$ ,  $Pz_i(S)$ ,  $\alpha_i(S)$ ,  $\beta_i(S)$ ,  $n_i(S)$ ,  $\kappa_i(S)$  のように表す。また、点  $P_h$  においては、座標、接線回転角  $\alpha$ 、 $\beta$ 、法線、曲率を  $Px_h$ ,  $Py_h$ ,  $Pz_h$ ,  $\alpha_h$ ,  $\beta_h$ ,  $n_h$ ,  $h_h$  のように表す。

[0288] 経路の設計において、厳密に通るべき点は点  $P_1$  と点  $P_h$  の2点であるので、この補間2点の3次元クロソイド補間である。ここで、両端点での補間条件を考えると、条件式の数未知数の数より2個多くなるので、 $G^2$ 連続な3次元クロソイド補間を行うために、図 4 3 のように点  $P_1$  と点  $P_h$  の間に点  $P_2$  を挿入するものとする。また点  $P_1$  と点  $P_2$  を結ぶ曲線を曲線  $C_2$ 、点  $P_2$  と点  $P_h$  を結ぶ曲線を曲線  $C_3$  とする。

[0289] 以下に各点における補間条件を記す。

[数72]

点  $P_1$  : 接線、法線、曲率 : 4 個

$$\cos[\alpha_2(0) - \alpha_1(1)] = 1$$

$$\cos[\beta_2(0) - \beta_1(1)] = 1$$

$$n_2(0) \cdot n_1(1) = 1$$

$$\kappa_2(0) = \kappa_1(1)$$

点  $P_2$  : 位置、接線、法線、曲率 : 7 個

$$Px_3(1) = Px_2(0)$$

$$Py_3(1) = Py_2(0)$$

$$Pz_3(1) = Pz_2(0)$$

$$\cos[\alpha_3(1) - \alpha_2(0)] = 1$$

$$\cos[\beta_3(1) - \beta_2(0)] = 1$$

$$n_3(1) \cdot n_2(0) = 1$$

$$\kappa_3(1) = \kappa_2(0)$$

点  $P_h$  : 位置、 $\beta$ 、法線 : 5 個

$$Px_3(1) = Px_h$$

$$Py_3(1) = Py_h$$

$$Pz_3(1) = Pz_h$$

$$\cos[\beta_3(1)] = 1$$

$$n_3(1) \cdot \{0, 1, 0\} = 1$$

[0290] 以上より、全体で成り立つべき条件式は16個である。ここで、各曲線ごと  
 が持つクロソイドパラメータはの $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h$ の7つであり、か  
 つ、曲線が2本なので未知数は14個となる。しかし、これでは未知数と条件  
 式の数で等しくないため、解を求めることが出来ない。そこで新たに挿入し  
 た2つの点 $P_2$ の $y, z$ 座標を未知数として扱い、未知数を2つ増やした。これで未  
 知数も条件式も16個となり、解を求めることができるようにした。また本  
 設計例では行わないが、この未知数と条件式の数に途中に厳密に通るべき点  
 を与え、その点の前後で $G^2$ 連続が達成されるなら常に成り立つので、点 $P_1$ と点  
 $P_h$ の間に補間対象点を増やしても解を求めることができる。

[0291] (a-6). 条件を満たすクロソイドパラメータを求める

a-5で立てた条件式を満たす解をニュートン・ラプソン法で求めた。補間方法、初期値の生成方法は3次元クロソイド補間の方法に従った。表18は、算出された各曲線のパラメータであり、表19は書く接続点における座標、接線、法線、曲率のずれを示したものである。

[0292] [表18]

生成された曲線のパラメータ

曲線 $C_2$	$a_0$	-0.063576
	$a_1$	0.0000
	$a_2$	0.62696
	$b_0$	-0.57595
	$b_1$	-0.98004
	$b_2$	0.77916
	$h$	1.9561
	始点 $P_1$	{-2.2429, -14.021, 2.6492}
曲線 $C_3$	$a_0$	6.8465
	$a_1$	1.729
	$a_2$	-0.86450
	$b_0$	-0.77684
	$b_1$	0.79736
	$b_2$	-0.020523
	$h$	2.69723
	始点 $P_2$	{-0.93007, -15.389, 2.3720}

[0293] [表19]

各接続点における座標、接線、法線、曲率のずれ

		座標	単位接線ベクトル	主法線ベクトル	曲率
P <sub>1</sub>	曲線C <sub>1</sub>	{-2.2429, -14.021, 2.6492}	{0.83697, -0.54353, 0.063533}	{-0.54463, -0.83867, 0.0}	0.50
	曲線C <sub>2</sub>	{-2.2429, -14.021, 2.6492}	{0.83697, -0.54353, 0.063533}	{-0.54463, -0.83867, 0.0}	0.50
	差	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	0
P <sub>2</sub>	曲線C <sub>2</sub>	{-0.93007, -15.389, 2.3720}	{0.60291, -0.59268, -0.53405}	{-0.10017, 0.60786, -0.78769}	0.68803
	曲線C <sub>3</sub>	{-0.93007, -15.389, 2.3720}	{0.60291, -0.59268, -0.53405}	{-0.10017, 0.60786, -0.78769}	0.68803
	差	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	0
P <sub>h</sub>	曲線C <sub>3</sub>	{0.000, -15.905, 0.0}	{0.14241, 0.0000, -0.98980}	{0.000, 1.0, 0.000}	0.039934
	与えた値	{0.0, -15.905, 0.0}	—	{0.0, 1.0, 0.0}	—
	差	{0.0, 0.0, 0.0}	—	{0.0, 0.0, 0.0}	—

[0294] (a-7). 経路の生成

a-5, a-6により得られたパラメータにより、点 $P_s$ から点 $P_h$ までの経路は設計することができる。また点 $P_h$ から点 $P_e$ までの経路は、経路が $y$ 軸対称であることにより、座標系を取り直して点 $P_e$ を点 $P_s$ とみなして生成される経路と同じであるのでこちらも同じ曲線で生成できる。

[0295] 以上の手法で生成された経路を図44に示す。実線はねじ軸上のボールの中心軌道である曲線 $C_0$ 、点 $P_s$ ～点 $P_n$ までの破線、一点鎖線、二点鎖線の3本の曲線がそれぞれ曲線 $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ である。また、点 $P_n$ ～点 $P_e$ までの二点鎖線、一点鎖線、破線の3本の曲線は、それぞれ曲線 $C_3$ 、 $C_2$ 、 $C_1$ と $y$ 軸に対して対称な曲線である。

[0296] 図45に点 $P_e$ から $z$ 軸の正の方向から見て反時計回りに循環経路を移動した移動距離 $s$ と曲率 $\kappa$ の関係のグラフを記す。グラフの線種は図44の曲線の線種に対応している。

[0297] 以上の手法により3次元クロソイド曲線を用いてデフレタータイプのボールねじの循環経路を設計した。なお循環経路を3次元クロソイド曲線を用いて設計する手法は、勿論デフレクタータイプのボールねじに限られず、回帰経路をパイプで構成する所謂リターンパイプタイプのボールねじに適用したり、あるいはナット端面に設けられたエンドキャップでボールをねじ軸のボール転走溝から掬い上げ、ナットの中を通して反対側のエンドキャップからねじ軸のボール転走溝に戻す所謂エンドキャップタイプのボールねじに適用したりしてよい。

[0298] ところで本発明の設計方法を実現するプログラムをコンピュータで実行する際には、コンピュータのハードディスク装置等の補助記憶装置にプログラムを格納しておき、メインメモリーにロードして実行する。また、そのようなプログラムは、CD-ROM等の可搬型記録媒体にプログラムを格納して売買したり、ネットワークを介して接続されたコンピュータの記録装置に格納しておき、ネットワークを通じて他のコンピュータに転送することもできる。

## [0299] B. クロソイド曲線を用いた数値制御方法

以下、クロソイド曲線を用いた数値制御方法の発明の実施形態について、  
 1. 3次元クロソイド曲線の定義と特徴、2. 3次元クロソイド曲線による  
 補間法、3. 3次元クロソイド補間を用いた数値制御方法に分けて順次説明  
 する。

## [0300] 1. 3次元クロソイド曲線の定義と特徴

## [0301] (1) 3次元クロソイドの基本式

クロソイド曲線(Clothoid curve)は、別名コルニューの螺旋(Cornu' s  
 spiral)とも呼ばれ、曲線の長さに比例して曲率が変わる曲線である。従来  
 知られている2次元のクロソイド曲線は、平面曲線(2次元曲線)の一種で  
 あり、図46に示されるx-y座標上において、次式で表される。

## [0302] [数73]

$$P = P_0 + \int_0^s e^{j\phi} ds = P_0 + h \int_0^S e^{j\phi} dS, \quad 0 \leq s \leq h, \quad 0 \leq S = \frac{s}{h} \leq 1 \quad (1)$$

$$\phi = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 = \phi_0 + \phi_v S + \phi_u S^2 \quad (2)$$

ここで、

## [数74]

$$P = x + jy, \quad j = \sqrt{-1} \quad (3)$$

は曲線上の点を表わす位置ベクトル、

## [数75]

$$P_0 = x_0 + jy_0 \quad (4)$$

は、その初期値(始点の位置ベクトル)である。

[数76]

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi \quad (5)$$

は、曲線の接線方向を表わす単位ベクトル（長さが1のベクトル）であり、その方向 $\phi$ は原線（x軸方向）から反時計まわりに測られる。この単位ベクトルに微小長さ $ds$ をかけて積分すると曲線上の点Pが求められる。

[0303] 曲線に沿って測った曲線の始点からの長さを $s$ とし、その全長（始点から終点までの長さ）を $h$ とする。 $s$ を $h$ で割った値を $S$ で表わす。 $S$ は無次元の値であり、これを曲線長変数と呼ぶ。

[0304] クロソイド曲線の特徴は、式(2)で示したように、接線方向角 $\phi$ が曲線長 $s$ または曲線長変数 $S$ の二次式で表わされることにある。 $c_0, c_1, c_2$ または $\phi_0, \phi_v, \phi_u$ は二次式の係数であり、これら及び曲線の全長 $h$ をクロソイドのパラメータと呼ぶ。図47は一般的なクロソイド曲線の形状を示す。

[0305] 以上の関係を3次元に拡張して、3次元クロソイド曲線の式を作る。従来3次元クロソイド曲線を与える式は知られていなかったが、発明者らは初めてこれを導いた。

[0306] 3次元クロソイド曲線を以下の式で定義する。

[数77]

$$P = P_0 + \int_0^s u ds = P_0 + h \int_0^S u dS, \quad 0 \leq s \leq h, \quad 0 \leq S = \frac{s}{h} \leq 1 \quad (6)$$

$$u = E^{k\beta} E^{j\alpha} (i) = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\alpha = a_0 + a_1 S + a_2 S^2 \quad (8)$$

$$\beta = b_0 + b_1 S + b_2 S^2 \quad (9)$$

ここで、

[数78]

$$P = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad P_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

はそれぞれ、3次元クロソイド上の点の位置ベクトル、及びその初期値を示す。 $i$ 、 $j$ 、 $k$ はそれぞれ、 $x$ 軸、 $y$ 軸、及び $z$ 軸方向の単位ベクトルである。

[0307]  $u$ は点 $P$ における曲線の接線方向を示す単位ベクトルであり、式(7)によって与えられる。式(7)において、 $E^{k\beta}$ 及び $E^{j\alpha}$ は回転マトリクスであり、図48に示されるように、それぞれ、 $k$ 軸（ $z$ 軸）まわりの角度 $\beta$ の回転及び $j$ 軸（ $y$ 軸）まわりの角度 $\alpha$ の回転を表わしている。前者をヨー(yaw)回転、後者をピッチ(pitch)回転という。式(7)は、 $i$ 軸（ $x$ 軸）方向の単位ベクトルを、まず $j$ 軸（ $y$ 軸）まわりに $\alpha$ だけ回し、しかるのちに $k$ 軸（ $z$ 軸）まわりに $\beta$ だけ回すことによって、接線ベクトル $u$ が得られることを示している。

[0308] すなわち、2次元の場合は、曲線の接線方向を表す単位ベクトル $e^{j\phi}$ は、 $x$ 軸からの傾き角度 $\phi$ から得られる。3次元の場合は、曲線の接線ベクトル $u$ は、ピッチ角 $\alpha$ 及びヨー角 $\beta$ から得ることができる。ピッチ角 $\alpha$ が0だと、 $x$   $y$ 平面で巻いた2次元クロソイド曲線が得られ、ヨー角 $\beta$ が0だと、 $x$   $z$ 平面で巻いた2次元クロソイド曲線が得られる。接線方向ベクトル $u$ に微小長 $ds$ をかけて積分すると3次元クロソイド曲線が得られる。

[0309] 3次元クロソイド曲線においては、接線ベクトルのピッチ角 $\alpha$ 及びヨー角 $\beta$ はそれぞれ式(8)及び式(9)に示すように、曲線長変数 $S$ の2次式で与えられる。このことによって接線方向の変化を自由に選びながら、なおかつ、その変化に連続性を持たせることが可能になる。

[0310] 以上の式によって示したごとく、3次元クロソイド曲線は「接線方向のピッチ角及びヨー角が、それぞれ曲線長変数の二次式で表わされる曲線である」と定義される。



[0311]  $P_0$  から始まる一つの 3 次元クロソイドセグメントは、  
[数79]

$$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h \quad (11)$$

の 7 個のパラメータによって決定される。 $a_0$  ないし  $b_2$  の 6 つの変数は角度の単位を持ち、クロソイドセグメントの形状を表わしている。これに対し  $h$  は長さの単位を持ち、クロソイドセグメントの大きさを表わしている。

[0312] 3 次元クロソイド曲線の典型的な例としては、図 4 9 に示されるような螺旋状の曲線がある。

[0313] (2) 動標構

式 (7) において、基本接線方向ベクトル  $i$  の代りに基本座標系  $[i, j, k]$  を代入すると、次の動標構 (moving frame)  $E$  を得る。

[0314] [数80]

$$\begin{aligned} E &= [u \ v \ w] = E^{k\beta} E^{j\alpha} [i \ j \ k] = E^{k\beta} E^{j\alpha} [I] = E^{k\beta} E^{j\alpha} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \alpha & -\sin \beta & \cos \beta \sin \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha & \cos \beta & \sin \beta \sin \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

$$u = \begin{Bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{Bmatrix}, \quad v = \begin{Bmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad w = \begin{Bmatrix} \cos \beta \sin \alpha \\ \sin \beta \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (13)$$

ここで、 $v$  及び  $w$  は曲線の接線に垂直な面に含まれる単位ベクトルであり、互いに直交するとともに、接線方向単位ベクトル  $u$  と直交する。この 3 つの単位ベクトルの組 (トライアド) は動点  $P$  とともに動くフレーム (座標系、標構) であり、これを動標構という。

[0315] 動標構が上式で求められるため、主法線、副法線の計算が容易になり、曲線の形状解析が容易にできる。

[0316] また、Eを用いて、ロボットの工具点の姿勢を求めることができ、ロボットハンドによって把持された物体の位置姿勢を求めることが可能になる。

[0317] Eの初値及び終値をそれぞれ $E_0$ ,  $E_1$ とすると、

[数81]

$$E_0 = E^{kb_0} E^{ja_0} \quad (14)$$

$$E_1 = E^{k(b_0+b_1+b_2)} E^{j(a_0+a_1+a_2)} \quad (15)$$

となる。

[0318] (3) ローリング

動標構を考慮することによって、3つ目の回転「ロール(roll)」を扱うことができる。ロールは接線方向まわりの回転である。ロールの存在は3次元クロソイド自身の形状には影響を与えないが、3次元クロソイドに誘導される動標構には影響する。曲がりくねった針金に通した算盤玉は、針金のまわりで自由に回転することができるが、そのことによって針金の形を変えるわけではない。

[0319] ロール回転を考慮するとき、動標構は下式となる。

[数82]

$$E = E^{k\beta} E^{j\alpha} E^{i\gamma} I = E^{k\beta} E^{j\alpha} E^{i\gamma} \quad (16)$$

[0320] ロール角 $\gamma$ についても、これをSの関数として表現することができる。

[数83]

$$\gamma = c_0 + c_1 S + c_2 S^2 \quad (17)$$

[0321] (4) 3次元クロソイド曲線の幾何学的性質

[0322] (a) 3次元クロソイド曲線の法線

3次元曲線の法線ベクトルは、接線方向ベクトル $u$ を用いて次の式で表されることが知られている。

[0323] [数84]

$$n = \frac{u'}{\|u'\|} \quad (18)$$

[0324] ここで、(7)式より3次元クロソイド曲線の接線ベクトルの1次微分は下記となる。

[数85]

$$u'(S) = \begin{Bmatrix} -\alpha'(S) \cos \beta(S) \sin \alpha(S) + \beta'(S) \sin \beta(S) \cos \alpha(S) \\ -\alpha'(S) \sin \beta(S) \sin \alpha(S) + \beta'(S) \cos \beta(S) \cos \alpha(S) \\ -\alpha'(S) \cos \alpha(S) \end{Bmatrix}$$

$$\|u'(S)\| = \sqrt{\alpha'(S)^2 + \beta'(S)^2 \cos^2 \alpha(S)} \quad (19)$$

[0325] すなわち、3次元クロソイド曲線の法線ベクトルは、 $S$ を用いて下記の形で表される。

[数86]

$$n(S) = \frac{u'(S)}{\|u'(S)\|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha'(S)^2 + \beta'(S)^2 \cos^2 \alpha(S)}} \begin{Bmatrix} -\alpha'(S) \cos \beta(S) \sin \alpha(S) - \beta'(S) \sin \beta(S) \cos \alpha(S) \\ -\alpha'(S) \sin \beta(S) \sin \alpha(S) + \beta'(S) \cos \beta(S) \cos \alpha(S) \\ -\alpha'(S) \cos \alpha(S) \end{Bmatrix} \quad (20)$$

[0326] (b) 回転を用いた3次元クロソイド曲線の法線

ここで(7)の接線 $u$ の決定と同様に法線 $n$ についても考えてみる。初期接線方向 $(1, 0, 0)$ に対して、初期法線方向を定数 $\gamma$ を用いて $(0, \cos \gamma, -\sin \gamma)$ で

表わすとする。これを接線と同じように回転させると、法線 $n$ は下記のように表される。

[0327] [数87]

$$\begin{aligned}
 n(S) &= \begin{bmatrix} \cos \beta(S) & -\sin \beta(S) & 0 \\ \sin \beta(S) & \cos \beta(S) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha(S) & 0 & \sin \alpha(S) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha(S) & 0 & \cos \alpha(S) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} -\sin \gamma \cos \beta(S) \sin \alpha(S) - \cos \gamma \sin \beta(S) \\ -\sin \gamma \sin \beta(S) \sin \alpha(S) + \cos \gamma \cos \beta(S) \\ -\sin \gamma \cos \alpha(S) \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{21}$$

[0328] (20) (21) の式を比較すると、 $\sin \gamma$ ,  $\cos \gamma$ は下記に対応していることがわかる。

[数88]

$$\begin{aligned}
 \sin \gamma &= \frac{\alpha'(S)}{\sqrt{\alpha'(S)^2 + \beta'(S)^2 \cos^2 \alpha(S)}} \\
 \cos \gamma &= \frac{\beta'(S) \cos \alpha(S)}{\sqrt{\alpha'(S)^2 + \beta'(S)^2 \cos^2 \alpha(S)}}
 \end{aligned} \tag{22}$$

[0329] (c) 3次元クロソイド補間における接続点での法線連続

3次元クロソイド補間における接続点での法線連続を達成するには式 (22) より、

[数89]

$$\tan \gamma = \frac{\alpha'(S)}{\beta'(S) \cos \alpha(S)} \tag{23}$$

が、連続であればよいことがわかる。

[0330] (d) 3次元クロソイド曲線の曲率

3次元クロソイド曲線の曲率は、下記の式で表される。

[数90]

$$\kappa(S) = \frac{\|P'(S) \times P''(S)\|}{\|P'(S)\|^3} = \frac{\|u(S) \times u'(S)\|}{h^3} = \frac{\|u'(S)\|}{h^2} \quad (24)$$

[0331] (19) 式より、曲率は、

[数91]

$$\kappa(S) = \frac{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 \cos^2 \alpha}}{h} \quad (25)$$

と表される。

[0332] (5) 3次元クロソイド曲線の特徴

[0333] (a) 曲線の連続性

一つのクロソイドセグメント（同一のパラメータで表わされるクロソイド）においては、その接線方向のピッチ角及びヨー角がそれぞれ曲線長変数  $S$  の2次式で与えられるので、これを1回微分して得られる法線方向、及び、2回微分して得られる曲率が曲線長変数  $S$  に関して連続であることが保証される。言い換えれば、一つのクロソイドセグメントの中では法線方向及び曲率が連続である。したがって、滑らかで性質の良い曲線が得られる。また、二つのクロソイド曲線を連結する場合にも、そのつなぎ目において接線、法線、曲率が連続になるようにパラメータを選択することによって、滑らかなひとつなぎの曲線を作ることができる。これをクロソイドスプラインという。

[0334] (b) 適用性

曲線の接線方向を二つの角度（ピッチ角及びヨー角）で振ることができるので、さまざまな条件に合わせた3次元曲線を任意に作ることができ、いろいろな用途に用いることができる。

[0335] (c) 幾何曲線との整合性

直線・円弧・ねじ曲線などの幾何曲線は、クロソイドパラメータのいくつかを0にし、あるいは、いくつかのパラメータ間に特定の関数関係を与えることによって作ることができる。これらの曲線はクロソイド曲線の一種であり、クロソイドのフォーマットを用いて表現できる。したがって、従来のNCのように、直線・円弧・自由曲線等によって記述するフォーマットを変えて取り扱う必要はなく、同じフォーマットを用いて計算したり、制御したりできる。

[0336] また、 $\alpha$ または $\beta$ のいずれかを常に0と置くことによって、2次元クロソイドを作ることができるので、これまで2次元クロソイドについてすでに得られている資源を活用することができる。

[0337] すなわち、既に知られている2次元クロソイドを含めて、円弧や直線などの個別の曲線も、 $\alpha$ や $\beta$ を適切に設定することで表現できる。このような個別の曲線について同一の形式3次元クロソイド曲線式を用いることができるので、計算手順を単純化できる。

[0338] (d)見通しの良さ

スプライン補間などの従来の補間法では、自由曲線を数式化した際に、その全体の形、あるいは局所的な形が分かりにくいことが多いが、3次元クロソイドにおいては、ピッチ角及びヨー角のそれぞれを想定することによって、比較的容易に全体像を把握することができる。

[0339] また、クロソイド曲線として表現した途端に線長・接線方向・曲率等の値は既知となっており、従来の補間法のように、あらためて計算する必要がない。すなわち、曲線のパラメータSに対応して、(7)、(20)及び(26)式に示すように、曲線の接線や、法線、曲率が直接的に求められる。このことは、後述する数値制御方式にきわめて有効な特徴である。このことによって、大幅に計算時間を短縮し、メモリーなどの資源を節約することができ、また、リアルタイムでの補間演算を可能にする。

[0340] NC加工において、工具軌跡の最小曲率半径は重要な問題であり、スプライン補間などではこれを求めるのに面倒な計算を要するが、クロソイドでは

一般にセグメントごとに最小曲率半径の値が既知であるため、カッター径の選定などにおいて有利である。

[0341] (e) 運動制御のやりやすさ

曲線の主変数が長さ

または正規化された長さ $s$ であり、曲線の方程式はこの長さに対する自然方程式で与えられている。このため、長さ $s$ を時間 $t$ の関数として定めることによって、加減速などの運動特性を任意に与えることができ、従来カムなどに用いられてきた特性の良い運動曲線を採用することによって、加工作業の高速化を図ることができる。長さ $s$ は実在のカルテシアン空間における値として与えられ、速度・加速度は接線方向に対して求められるので、従来の補間法のように各軸ごとに与えられた値を合成する必要がない。また、曲率の計算が容易なため、運動時の遠心加速度も容易に求められ、運動軌跡に応じた制御を行うことができる。

[0342] (6) 曲線の生成と各パラメータの性質

定義によれば3次元クロソイド曲線の各パラメータが曲線に及ぼす影響は以下のとおりである。各パラメータを与えることによって図49のように3次元クロソイド曲線を生成することができる。

表20は、3次元クロソイド曲線の各パラメータの性質をまとめたものである。

[0343] [表20]

パラメータ	意味
$P_0$	3次元クロソイド曲線を平行移動する。
$h$	3次元クロソイド曲線の大きさを決定する。
$a_0, b_0$	3次元クロソイド曲線を回転する。
$a_1, a_2, b_1, b_2$	3次元クロソイド曲線の形状を決定する。

[0344] 2. 3次元クロソイド曲線による補間法

[0345] (1) 滑らかな接続の数学的条件

1本の3次元クロソイド曲線では、曲線の形状表現に限界がある。ここでは、数値制御による工具の運動制御を主な目的として、3次元クロソイド曲線（3次元クロソイドセグメント）を複数本接続し、この複数本の3次元クロソイドセグメントによって工具の運動を制御する。

[0346] 2本の3次元クロソイド曲線がその端点で滑らかに接続されていることは、端点位置、接線および曲率が連続に接続されていることであると定義される。上述の定義式を用いて、この条件は、以下のように記述される。最初の3式は位置の連続性、次の2式は接線の連続性、次の1式は法線の一致、最後の式は曲率の連続性を示している。

[0347] [数92]

$$\begin{aligned}
 P_{X_i}(1) &= P_{X_{i+1}}(0) \\
 P_{Y_i}(1) &= P_{Y_{i+1}}(0) \\
 P_{Z_i}(1) &= P_{Z_{i+1}}(0) \\
 \alpha_i(1) &= \alpha_{i+1}(0) \\
 \beta_i(1) &= \beta_{i+1}(0) \\
 \tan \gamma_i(1) &= \tan \gamma_{i+1}(0) \\
 \kappa_i(1) &= \kappa_{i+1}(0)
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

[0348] これは、接続点で接線ベクトルと法線ベクトル、曲率と $\alpha$ 、 $\beta$ 連続であるための十分条件であり、条件がきつすぎる場合がある。そこで純粋に条件を満たすように下記のように条件を変えることもできる。

[0349] [数93]

$$\begin{aligned}
 P_{X_i}(1) &= P_{X_{i+1}}(0) \\
 P_{Y_i}(1) &= P_{Y_{i+1}}(0) \\
 P_{Z_i}(1) &= P_{Z_{i+1}}(0) \\
 \cos[\alpha_i(1) - \alpha_{i+1}(0)] &= 1 \\
 \cos[\beta_i(1) - \beta_{i+1}(0)] &= 1 \\
 \tan \gamma_i(1) &= \tan \gamma_{i+1}(0) \\
 \kappa_i(1) &= \kappa_{i+1}(0)
 \end{aligned}
 \tag{27}$$



[0350] ここでさらに、

[数94]

$$\cos[\alpha_i(1) - \alpha_{i+1}(0)] = 1$$

であることを考慮にいれると

[数95]

$$\tan \gamma_i(1) = \tan \gamma_{i+1}(0)$$

は、下記の条件で置き換えられる。

[0351] [数96]

$$\begin{aligned} \tan \gamma_i(1) &= \tan \gamma_{i+1}(0) \\ \frac{\alpha'_i(1)}{\beta'_i(1) \cos \alpha_i(1)} &= \frac{\alpha'_{i+1}(0)}{\beta'_{i+1}(0) \cos \alpha_{i+1}(0)} \\ \therefore \alpha'_i(1) \beta'_{i+1}(0) &= \alpha'_{i+1}(0) \beta'_i(1) \end{aligned}$$

[0352] 結局下記の条件を満たせば目的を達成することが出来ることがわかる。

[数97]

$$\begin{aligned} P_{X_i}(1) &= P_{X_{i+1}}(0) \\ P_{Y_i}(1) &= P_{Y_{i+1}}(0) \\ P_{Z_i}(1) &= P_{Z_{i+1}}(0) \\ \cos[\alpha_i(1) - \alpha_{i+1}(0)] &= 1 \\ \cos[\beta_i(1) - \beta_{i+1}(0)] &= 1 \\ \alpha'_i(1) \beta'_{i+1}(0) &= \alpha'_{i+1}(0) \beta'_i(1) \\ \kappa_i(1) &= \kappa_{i+1}(0) \end{aligned} \tag{28}$$

[0353] (28)式において、最初の3式は位置の連続性、次の2式は接線方向の連続性、次の1式は法線方向の一致、最後の式は曲率の連続性を示している。 $G^2$  連続な補間を行うには、2本の3次元クロソイド曲線がその端点で(28)式の7つの条件式を満たす必要がある。

[0354]  $G^2$ 連続（GはGeometryの頭文字）について補足する。図50は $G^2$ 連続な補間の条件を示す。

[0355]  $G^0$ 連続とは2本の3次元クロソイド曲線がその端点で位置が一致することをいい、 $G^1$ 連続とは接線方向が一致することをいい、 $G^2$ 連続とは接触平面（法線）及び曲率が一致することをいう。以下の表21にスプライン曲線で用いられる $C^0 \sim C^2$ 連続と本発明のクロソイド曲線で用いられる $G^0 \sim G^2$ 連続とを対比する。

[0356] [表21]

$C^0$ : 位置	$G^0$ : 位置
$C^1$ : 一次微分係数	$G^1$ : 接線方向
$C^2$ : 二次微分係数	$G^2$ : 接触平面(法線)、曲率

[0357] 2本の3次元クロソイド曲線の連続性を考えたときに、 $C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow C^2$ 、 $G^0 \rightarrow G^1 \rightarrow G^2$ になるにしたがって補間条件が厳しくなる。 $C^1$ 連続では接線の大きさも方向も一致する必要があるが、 $G^1$ 連続では接線方向だけが一致すればよい。2本の3次元クロソイド曲線で接線を滑らかに接続する場合は、 $G^1$ 連続で条件式を作成するほうがよい。スプライン曲線のように $C^1$ 連続で条件式を作成すると、幾何学的には関係のない接線の大きさが一致するという条件が入るので、条件が厳しくなりすぎる。 $G^1$ 連続で条件式を作成すると、一次微分係数の大きさを自由にとれるという利点がある。

[0358]  $G^2$ 連続では接触平面（法線）を一致させる。接触平面とは図51に示されるように曲線Cが局所的に含まれる平面 $S_1$ 、 $S_2$ をいう。この図51では点Pにおいて接線方向が連続であるが接触平面 $S_1$ 、 $S_2$ が不連続の例を示している。3次元曲線の連続性を考えたときに、接線方向の一致の次に考えなければいけないことは接触平面の一致である。曲率を議論するときには接触平面が一致していないと意味がなく、接触平面を一致させた上で曲率を一致させる必要がある。2本の3次元曲線で、座標、接線方向、接触平面（法

線方向) 及び曲率を一致させることが  $G^2$  連続を満たす条件になる。

[0359] (2) 具体的な計算手順

次の2種類の計算手順がある。

[0360] (a) 曲線のパラメータ  $h, \alpha, \beta$  を与えて、1本の3次元クロソイド曲線を発生させ、その端点で、(28) 式を満たすように次の3次元クロソイド曲線のパラメータを定める。このようにして、次々と滑らかに接続する3次元クロソイド曲線を発生させることができる。この計算手順によれば、曲線パラメータの算出は容易であり、これを順解と呼ぶ。この方式によれば、様々な形状の曲線を容易に発生できるが、曲線が通過する接続点を明示的に指定することはできない。

[0361] (b) 予め指定された点群が曲線の接続点となるように、3次元クロソイド曲線を接続す

ることが出来る。ここでは、離散的に任意に与えられた点列の各区間毎に短いクロソイド曲線(クロソイドセグメント)を作成する。この場合には、(28) 式を満たすように曲線パラメータを決定する計算手順は(a)より複雑であり、繰り返し収束計算となる。この計算手順を、接続条件から逆に曲線パラメータを決定する、ということから、逆解と呼ぶ。

[0362] 上記(b)の逆解について、計算手法を詳細に記述する。解くべき計算問題は、次のように定式化される。

未知パラメータ：曲線パラメータ

拘束条件：(28) 式、あるいはその一部

[0363] 要求される問題に応じて、拘束条件の数は変化し、それに見合う数の曲線パラメータを未知パラメータとして設定すればよい。例えば、曲率の連続性が要求されない場合には、一部の曲線パラメータを自由に動かすことが出来る。あるいは、曲率連続でかつ接線方向が指定されている場合には、補間に用いる3次元クロソイド曲線の数分割により増やして、対応する未知曲線パラメータを増やす必要がある。

[0364] 上記の繰り返し収束計算を安定に収束させるためには、計算上の工夫が必

要である。計算の発散を避け、収束を速めるために、未知パラメータについてより良い初期値を設定することは有効である。そのために、与えられた接続点などの拘束条件を満たす、より単純な補間曲線、例えば線形スプライン曲線などを発生させ、その曲線形状から、3次元クロソイド曲線の曲線パラメータを推算して、繰り返し収束計算の初期値とすることは有効である。

[0365]     あるいは、満たすべき拘束条件を一気に満たすのではなく、順次条件式を増やしていく方式も、安定に解を得る手法として有効である。例えば、曲線発生の手順を次のような三つのSTEPに分けて、順次実行する。第1STEPとして位置情報と接線方向が一致するように補間した後で、第2STEPとして法線方向を一致するように補間を行い、第3STEPで曲率も一致するように補間する。この手法の流れの概要を図52に記す。必要な3次元クロソイド曲線式及びその接線、法線や曲率の定義式は既に示した。

[0366]     (3) 3次元クロソイド曲線を用いた補間法の実施例

[0367]     (a) 補間法の流れ

3次元クロソイド曲線を用いて与えられた点列の間を滑らかに補間していく手法の実施例について詳しく述べる。3次元クロソイド曲線を用いた補間法を以降、3次元クロソイド補間と呼ぶ。補間によって生成される曲線群全体を3次元クロソイド曲線と呼び、それを構成する単位曲線を3次元クロソイドセグメントと呼ぶ。

[0368]     3次元クロソイド補間の基本の流れとしては、補間対象の点間を結ぶ3次元クロソイドセグメントの各パラメータを未知数とし、厳密に補間対象の点を通り、かつ $G^2$ 連続となるような条件を満たす解をニュートン・ラプソン法で求めて曲線を生成する。この流れの概要をまとめたものが図53である。ここで $G^2$ 連続とは、2本の3次元クロソイド曲線がその端点で位置、接線方向、法線方向及び曲率が一致することをいう。

[0369]     (b)  $G^2$ 連続な補間の条件

3次元クロソイド補間において、厳密に補間対象の点を通り、かつ $G^2$ 連続となるような条件について具体的な条件を考える。

[0370] 今、簡単に3つの点 $P_1 = \{P_{x_1}, P_{y_1}, P_{z_1}\}$ ,  $P_2 = \{P_{x_2}, P_{y_2}, P_{z_2}\}$ ,  $P_3 = \{P_{x_3}, P_{y_3}, P_{z_3}\}$ があり、その点を3次元クロソイドセグメントで補間することを考える。図54は点 $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ の3次元クロソイド補間を示す。点 $P_1$ ,  $P_2$ 間を結ぶ曲線を曲線 $C_1$ 、点 $P_2$ ,  $P_3$ 間を結ぶ曲線を曲線 $C_2$ とすると、この場合未知数は、曲線 $C_1$ のパラメータ $a0_1, a1_1, a2_1, b0_1, b1_1, b2_1, h_1$ 、曲線 $C_2$ のパラメータ $a0_2, a1_2, a2_2, b0_2, b1_2, b2_2, h_2$ の14個となる。また、以後説明にでてくる文字のサブスクリプトは各曲線のサブスクリプトに対応している。

[0371] ここで厳密に補間対象の点を通り、かつ $G^2$ 連続となるような条件を考える。まず、始点においては厳密に補間対象の点を通るという条件は3次元クロソイド曲線の定義から考えると、始点を与えた時点で必然的に達成されるので補間条件はない。次に接続点 $P_1$ では位置について3つ、接線ベクトルについて2つ、曲率連続の条件の式が大きさと方向について2つの合計7個成り立つ。また終点については、点 $P_2$ では位置について3つの3個である。以上より条件式は合計で10個ある。しかし、これでは未知数14個に対して、条件式が10個しか存在しないので未知数の解を求めることができない。そこで、本研究においては、両端点の接線ベクトルを与え、両端点について2つずつの条件を増やし条件式と未知数の数を等しくした。また、始点における接線方向を決定すれば $a0_1, b0_1$ は、その定義式より求めることができるので未知数として扱わないことにした。以下、各条件について考えていく。

[0372] まず、位置の条件について考えると、(1-1) (1-2) (1-3) 式より、下記の3つのが成り立つ。(以下自然数 $i < 3$ とする。)

[0373] [数98]

$$Px_i + h_i \int_0^1 \cos(a0_i + a1_i S + a2_i S^2) \cos(b0_i + b1_i S + b2_i S^2) dS - Px_{i+1} = 0 \quad (1-1)$$

$$Py_i + h_i \int_0^1 \cos(a0_i + a1_i S + a2_i S^2) \sin(b0_i + b1_i S + b2_i S^2) dS - Py_{i+1} = 0 \quad (1-2)$$

$$Pz_i + h_i \int_0^1 (-\sin(a0_i + a1_i S + a2_i S^2)) dS - Pz_{i+1} = 0 \quad (1-3)$$

[0374] 次に、接線方向について考えると (1-4) (1-5) の2つの式が成り立つ。

[数99]

$$\cos(a0_i + a1_i + a2_i - a0_{i+1}) = 1 \quad (1-4)$$

$$\cos(b0_i + b1_i + b2_i - b0_{i+1}) = 1 \quad (1-5)$$

[0375] 曲率  $\kappa$  の大きさについては、次の式 (1-6) が成り立つ。

[数100]

$$\kappa_i(1) - \kappa_{i+1}(0) = 0 \quad (1-6)$$

[0376] 最後に法線方向ベクトル  $n$  について考える。3次元クロソイド曲線の法線ベクトル  $n$  は、(21) 式で表される。

[0377] ここで3次元クロソイド曲線の接線ベクトル  $u$  の決定と同様に回転を用いて、法線ベクトル  $n$  を考えてみる。初期接線方向  $(1, 0, 0)$  に対して、初期法線方向を定数  $\gamma$  を用いて  $(0, \cos \gamma, -\sin \gamma)$  で表すとする。これを接線と同じように回転させると、法線  $n$  は式 (1-7) のように表される。

[0378] [数101]

$$\begin{aligned}
 n(S) &= \begin{bmatrix} \cos \beta(S) & -\sin \beta(S) & 0 \\ \sin \beta(S) & \cos \beta(S) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha(S) & 0 & \sin \alpha(S) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha(S) & 0 & \cos \alpha(S) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} -\sin \gamma \cos \beta(S) \sin \alpha(S) - \cos \gamma \sin \beta(S) \\ -\sin \gamma \sin \beta(S) \sin \alpha(S) + \cos \gamma \cos \beta(S) \\ -\sin \gamma \cos \alpha(S) \end{Bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{1-7}$$

[0379] (21) (1-7) 式を比較すると、 $\sin \gamma$ ,  $\cos \gamma$  は (1-8) 式に対応していることがわかる。

[数102]

$$\begin{aligned}
 \sin \gamma &= \frac{\alpha'(S)}{\sqrt{\alpha'(S)^2 + \beta'(S)^2 \cos^2 \alpha(S)}} \\
 \cos \gamma &= \frac{\beta'(S) \cos \alpha(S)}{\sqrt{\alpha'(S)^2 + \beta'(S)^2 \cos^2 \alpha(S)}}
 \end{aligned}
 \tag{1-8}$$

[0380] つまり、式(1-8)より、3次元クロソイド補間における接続点での法線連続を達成するには  $\tan \gamma$  が、連続であればよいことがわかる。

[数103]

$$\tan \gamma = \frac{\alpha'(S)}{\beta'(S) \cos \alpha(S)}
 \tag{1-9}$$

[0381] つまり法線連続である条件は、式(1-10)であることがわかる。

[数104]

$$\tan \gamma_i(1) = \tan \gamma_{i+1}(0)
 \tag{1-10}$$

[0382] ここでさらに、

[数105]

$$\cos[\alpha_i(1) - \alpha_{i+1}(0)] = 1
 \tag{1-11}$$

であることを考慮にいと条件式(1-10)は、下記の条件式(1-12)で置き換えられる。つまり、法線連続である条件は(1-12)式である。

[0383] [数106]

$$\alpha'_i(1)\beta'_{i+1}(0) = \alpha'_{i+1}(0)\beta'_i(1) \quad (1-12)$$

[0384] 以上をまとめると厳密に補間対象の点を通り、かつ $G^2$ 連続となるような条件は接続点では式(1-13)のようになることがわかる。また、始点・終点においてもこれらのうちのいくつかの条件が選択される。

[0385] [数107]

$$\begin{aligned} P_{X_i}(1) &= P_{X_{i+1}}(0) \\ P_{Y_i}(1) &= P_{Y_{i+1}}(0) \\ P_{Z_i}(1) &= P_{Z_{i+1}}(0) \\ \cos[\alpha_i(1) - \alpha_{i+1}(0)] &= 1 \\ \cos[\beta_i(1) - \beta_{i+1}(0)] &= 1 \\ \alpha'_i(1)\beta'_{i+1}(0) &= \alpha'_{i+1}(0)\beta'_i(1) \\ \kappa_i(1) &= \kappa_{i+1}(0) \end{aligned} \quad (1-13)$$

[0386] 以上より、未知数 $a1_1, a2_1, b1_1, b2_1, h_1, a0_2, a1_2, a2_2, b0_2, b1_2, b2_2, h_2$ の12個に対して、条件式は下記の12個が成り立つことがわかる。(点 $P_3$ における接線方向回転角を $\alpha_3, \beta_3$ とする。)

[0387] [数108]



$$\begin{aligned}
P_{x_1}(1) &= P_{x_2}(0) \\
P_{y_1}(1) &= P_{y_2}(0) \\
P_{z_1}(1) &= P_{z_2}(0) \\
\cos[\alpha_1(1) - \alpha_2(0)] &= 1 \\
\cos[\beta_1(1) - \beta_2(0)] &= 1 \\
\alpha'_1(1)\beta'_2(0) &= \alpha'_2(0)\beta'_1(1) \\
\kappa_1(1) &= \kappa_2(0) \\
P_{x_2}(1) &= P_{x_3}(0) \\
P_{y_2}(1) &= P_{y_3}(0) \\
P_{z_2}(1) &= P_{z_3}(0) \\
\cos[\alpha_2(1) - \alpha_3] &= 1 \\
\cos[\beta_2(1) - \beta_3] &= 1
\end{aligned} \tag{1-14}$$

- [0388] これでは未知数 12 個について 12 個の式が成り立つので解を求めることができる。これをニュートン・ラプソン法によって解き、解を求める。
- [0389] また、一般的に  $n$  個の点列を補間するときを考えると、条件式は今述べてきた自然数  $i$  を  $i < n$  と拡張すればよい。後は未知数と条件式の数の問題である。
- [0390] 例えば  $n-1$  個の点列があるとき、 $N$  個の未知数と  $N$  個の関係式が成り立つとする。ここでさらに 1 点増えたとすると、未知数は 3 次元クロソイドセグメント  $P_{n-1}, P_n$  のクロソイドパラメータ  $a_{0_n}, a_{1_n}, a_{2_n}, b_{0_n}, b_{1_n}, b_{2_n}, h_n$  の 7 つが増える。一方で、条件式は、接続点がひとつ増えるので点  $P_{n-1}$  で位置について 3 つ、接線ベクトルについて 2 つ、点  $P_{n-1}$  の曲率連続の条件の式が大きさや方向について 2 つの合計 7 つ増える。
- [0391]  $n = 3$  では未知数、関係式ともに 12 個であることがわかっているから、 $n \geq 3$  では、未知数は  $7(n-2) + 5$  個、これに対して成り立つ式も  $7(n-2) + 5$  個ある。これで未知数とそれに関する条件の数が等しくなるので、 $n$  個の自由点列の場合も 3 点の場合と同様の方法で解を求めることが可能である。解法としては、未知数と条件式の間には (1-15) (1-16) 式の関係が成り立

つことを利用したニュートン・ラプソン法を用いて解いた。（条件をF未知数をu、誤差ヤコビアン行列Jとする。）

[0392] [数109]

$$\Delta F = [J] \Delta u \quad (1-15)$$

$$\Delta u = [J]^{-1} \Delta F \quad (1-16)$$

[0393] 以上より、n個の点列に対しても厳密に補間対象の点を通り、かつ $G^2$ 連続となるような3次元クロソイド補間が行えることがわかる。

[0394] (c) 初期値の決定

ニュートン・ラプソン法においては、解の探索を始める際に適当な初期値を与える必要がある。初期値はどのように与えられてもいいが、ここではその初期値の与え方の一例について述べる。

[0395] 先行研究である3D Discrete Clothoid Splinesは、厳密に補間対象点を通り、曲率が始点からの移動距離に対して滑らかに変化するような性質を持っている。そこで、本研究では3次元クロソイド補間のための初期値を、図55のような $r=4$ の3D Discrete Clothoid SplinesのポリゴンQを作り、そこから計算で決定した。

[0396] ここで3D Discrete Clothoid Splinesについて補足説明する。図56に示されるようにまず、補間対象の点列を頂点とする多角形Pを作り、Pの各頂点間に同じ数 $r$ 個づつ新たな頂点を挿入し、 $P \subset Q$ となるような多角形Qを作る。ここでPの頂点が $n$ 個あるとすると、ポリゴンQは閉じている場合で $rn$ 個、開いている場合で $r(n-1)+1$ 個の頂点を持つことになる。以後サブスクリプトを始点からの通し番号として、各頂点を $q_i$ で表すことにする。また、各頂点において、方向として従法線ベクトル $b$ を、大きさとして曲率 $\kappa$ を持つようなベクトル $k$ を定める。

[0397] このとき、下記の頂点同士が等距離になるような式(1-17)を満たし、曲率が始点からの移動距離に比例するような条件に最も近くなるときの(式(1-18)の関数を最小化するときの)ポリゴンQを3D Discrete Clothoid

Splinesと言う。

[0398] [数110]

$$|q_{i-1} q_i| = |q_{i+1} q_i|, \quad (q_i \notin P) \quad (1-17)$$

$$\sum_{i=1}^{r-1} \|\Delta^2 k_{ir+1}\|^2, \quad i = \{0 \dots n-1\}, \quad \Delta^2 k_i = k_{i-1} - 2k_i + k_{i+1} \quad (1-18)$$

[0399] 3D Discrete Clothoid Splinesでは各頂点のフレネ標構がすでに求まっている。そこで、その単位接線方向ベクトル  $t$  よりパラメータ  $a_0, b_0$  を求める。この接線方向ベクトル  $t$  はポリゴン  $Q$  を求めたときにすでに既知となっており、この  $t$  と3次元クロソイド曲線の接線の式とにより、ポリゴン  $Q$  の頂点の接線方向回転角  $\alpha, \beta$  が求まる。これにより各曲線の  $a_0, b_0$  の初期値が求まる。また、始点から始まる3次元クロソイド線分においては、その値を与える。

[0400] [数111]

$$u = \begin{Bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{Bmatrix} \quad (1-19)$$

[0401] ここで、3D Discrete Clothoid Splinesは、頂点が等距離に並んでいることを考えると、図55の点  $q_{4i+1}$  では、曲線長変数  $S$  が  $1/4$  であると近似することができる。同様に点  $q_{4(i+1)-1}$  では、曲線長変数  $S$  が  $3/4$  であると近似することができる。これらを3次元クロソイド曲線の  $\alpha$  の式とをあわせて考慮すると下記の式(1-20)が成り立つ。

[0402] [数112]

$$\begin{cases} a0_{4i} + \frac{1}{4}a1_{4i} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a2_{4i} = a0_{4i+1} \\ a0_{4i} + \frac{3}{4}a1_{4i} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 a2_{4i} = a0_{4(i+1)-1} \end{cases} \quad (1-20)$$

[0403] この式は未知数が $a1_{4i}$ と $a2_{4i}$ の2次元連立方程式になっており、これを解いてパラメータ $a_1$ ,  $a_2$ の初期値とする。同様にパラメータ $b_1$ ,  $b_2$ の初期値も決定できる。

[0404] 残る未知数は曲線長 $h$ であるが、この初期値については3次元クロソイド曲線の曲率の式より算出する。3次元クロソイド曲線の曲率は、式(1-21)で表される。

[0405] [数113]

$$\kappa = \frac{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 \cos^2 \alpha}}{h} \quad (1-21)$$

[0406] この式を変形すると式(1-22)になり、 $h$ の初期値が決定される。

[数114]

$$h_{4i} = \frac{\sqrt{(a1_{4i} + 2a2_{4i})^2 + (b1_{4i} + 2b2_{4i})^2 \cos^2(a0_{4i} + a1_{4i} + a2_{4i})}}{\kappa_{4(i+1)}} \quad (1-22)$$

[0407] 以上の方法で7つの3次元クロソイドパラメータについて初期値を決定することができる。この決定した初期値を用い(b)で述べたような $G^2$ 連続となるような条件下で各曲線のパラメータの近似値をニュートン・ラプソン法によって求めた。これによって得られたパラメータから3次元クロソイド線分を生成し、点列間を3次元クロソイド曲線で補間することを行った。

[0408] (d) 補間例

実際に以上に述べた手法で点列を補間した例として(0.0, 0.0, 0.0),

(2.0, 2.0, 2.0), (4.0, 0.0, 1.0), (5.0, 0.0, 2.0)の4点を3次元クロソイド補間した例を挙げる。補間により生成された3次元クロソイド曲線の透視図を図57に載せた。図57は実線が3次元クロソイド曲線であり、破線、一点鎖線、二点鎖線は曲線上の各点における、大きさを $\log(\text{曲率半径} + \text{自然対数}e)$ に、方向を法線ベクトルにとった曲率半径変化パターンである。

[0409] さらに表22に各曲線のパラメータを、また表23に、各接続点での座標・接線・法線・曲率のずれを載せた。これらより各接続点で $G^2$ 連続となるような3次元クロソイド曲線が生成されていることがわかる。また、図58は横軸に始点からの移動距離、縦軸に曲率を取った曲率変化グラフである。

[0410] [表22]

### 各3次元クロソイド線分のパラメータ

#### 曲線1 (曲率半径変化パターン 破線)

$$\begin{aligned}\alpha &= -0.657549 - 1.05303S + 1.84584S^2 \\ \beta &= 1.03297 + 1.29172S - 2.55118S^2 \\ h &= 3.82679 \\ P_0 &= (0.0, 0.0, 0.0)\end{aligned}$$

#### 曲線2 (曲率半径変化パターン 一点鎖線)

$$\begin{aligned}\alpha &= 0.135559 + 2.18537S - 2.69871S^2 \\ \beta &= -0.226655 - 3.15603S + 3.03298S^2 \\ h &= 3.16932 \\ P_0 &= (2.0, 2.0, 2.0)\end{aligned}$$

#### 曲線3 (曲率半径変化パターン 二点鎖線)

$$\begin{aligned}\alpha &= -0.377569 - 1.45922S + 0.984945S^2 \\ \beta &= -0.349942 + 1.32198S - 0.873267S^2 \\ h &= 1.43987 \\ P_0 &= (4.0, 0.0, 1.0)\end{aligned}$$

[0411] [表23]

各接続点での座標・接線・法線・曲率のずれ

曲線 1 と曲線 2 の接続点

Coord: (  $1.16 \times 10^{-5}$ ,  $2.00 \times 10^{-6}$ ,  $3.82 \times 10^{-6}$  )  
 Tvector: (  $7.59 \times 10^{-5}$ ,  $1.50 \times 10^{-5}$ ,  $2.95 \times 10^{-4}$  )  
 Nvector: (  $2.93 \times 10^{-4}$ ,  $9.19 \times 10^{-5}$ ,  $-7.57 \times 10^{-6}$  )  
 Curvature:  $3.06 \times 10^{-7}$

曲線 2 と曲線 3 の接続点

Coord: (  $-4.33 \times 10^{-6}$ ,  $-1.64 \times 10^{-6}$ ,  $1.11 \times 10^{-5}$  )  
 Tvector: (  $2.06 \times 10^{-6}$ ,  $2.33 \times 10^{-4}$ ,  $1.97 \times 10^{-4}$  )  
 Nvector: (  $3.30 \times 10^{-4}$ ,  $1.19 \times 10^{-5}$ ,  $-3.23 \times 10^{-5}$  )  
 Curvature:  $5.96 \times 10^{-6}$

[0412] (4) 両端における各値の制御を考慮した  $G^2$  連続な 3 次元クロソイド補間

(a) 補間条件と未知数

(3) で述べたように、曲線が開いている場合で補間対象の点が  $n$  個あるとき、点列は  $n-1$  個の曲線で 3 次元クロソイド補間される。厳密に各点を通るなら各 3 次元クロソイド線分について未知数は  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h$  の 7 つあるので、未知数は全体で  $7(n-1)$  個あることになる。一方、条件式については、 $n-2$  個ある接続点ごとに座標、接線、法線、曲率の 7 個ずつと終点における座標の 3 個が存在するので、全部で  $7(n-2)+3$  個である。(3) の手法ではこれに始点・終点における接線ベクトルを与え、条件を 4 個増やすことによって、条件式と未知数の数を合わせていた。

[0413] ここで、始点・終点における接線・法線・曲率を制御し、かつ  $G^2$  連続となるように補間するなら、条件は両端における接線を制御したときと比べて、さらに始点・終点で法線・曲率について 2 個ずつの合計 4 個増えることになる。すると、条件式は全部で  $7n-3$  個ということになる。この場合、未知数の数が条件より少なくなるため、ニュートン・ラプソン法で解を求めることはできない。そのため、なんらかの方法で未知数を増やす必要がある。

[0414] そこで、ここでは、補間対象点を新たに挿入することによって未知数と条件式の数とを等しくすることにした。例えば、4つ未知数の方が多いのであれば、新たな点を2つ挿入し、各点の座標のうち2つを未知数として扱う。

[0415] この場合接続点が2つ増えるので、各接続点について条件が座標、接線、法線、曲率の7個ずつの14個増える。一方で、未知数は3次元クロソイド線分が2つ増えるので、 $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h$ の7つずつの合計14個の未知数が増えることになる。このとき点列に含まれる点の数は $n+2$ 個であるから、全体で考えると未知数は $7(n+1)$ 個、条件式は $7(n+1)+4$ 個ということになる。ここでさらに、新たに挿入した点の座標のうち2つを未知数として扱うとすると、未知数は4つ増えることになる。すると、未知数も条件式も $7(n+2)-3$ 個となり、未知数の解を求めることができるようになる。このように新たな点を挿入することによって、与えられた各点を厳密に通る $G^2$ 連続かつ、両端点の接線・法線・曲率を制御した補間を行うことが可能になる。

[0416] さらに一般的な場合について考える。 $n$ 個の点列を補間するとき、両端点で $m$ 個の項目を制御する場合についての挿入する点の数とその点において未知数として扱う座標の数について考える。先にも書いたが、曲線が開いている場合、点列は $n-1$ 個の曲線で補間される。もし、厳密に各点を通るなら各3次元クロソイド線分について未知数は $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h$ の7つあるので、未知数は全体で $7(n-1)$ 個あることになる。一方、条件式については、 $n-2$ 個ある接続点ごとに座標、接線、法線、曲率の7個ずつと終点における座標の3個が存在するので、全部で $7(n-2)+3$ 個であり、条件式の方が4つ少ない。つまり、両端点において制御されるべき項目は4つ以上ということになる。以下、説明中で $m$ は4以上の自然数、 $k$ は2以上自然数であるとして、新たに点を挿入したときに条件式と未知数の数を等しくする方法について述べる。

[0417] (i)  $m=2k$ のとき

両端であわせて $m=2k$ 個の項目を制御するとき、未知数は全体で $7(n-1)$ 個、条件式は全体で $7(n-1)-4+2k$ 個である。このとき過剰な条件式は $2k-4$ 個である。今、 $k-2$ 個の点を新たに挿入することを考えると、3次元クロソイド線分が

$k-2$ 本、接続点が $k-2$ 個増えるので、未知数は全体で $7(n+k-3)$ 個、条件式は全体で $7(n+k-3)-4+2k$ 個となる。ここでさらに新たに挿入した各点の座標の値のうち2つ（例えば $x, y$ ）を未知数として扱うとすると、未知数は全体で $7(n+k-3)+2(k-2)$ 個、条件式は全体で $7(n+k-3)+2(k-2)$ 個となり未知数と条件式の数が等しくなる。

[0418] (ii)  $m=2k+1$ のとき

両端であわせて $m=2k+1$ 個の項目を制御するとき、未知数は全体で $7(n-1)$ 個、条件式は全体で $7(n-1)+2k-3$ 個である。このとき過剰な条件式は $2k-3$ 個である。今、 $k-1$ 個の点を新たに挿入することを考えると、3次元クロソイド線分が $k-1$ 本、接続点が $k-1$ 個増えるので、未知数は全体で $7(n+k-2)$ 個、条件式は全体で $7(n+k-2)-3+2k$ 個となる。ここでさらに新たに挿入した各点の座標の値のうち2つ（例えば $x, y$ ）を未知数として扱うとすると、未知数は全体で $7(n+k-2)+2(k-2)$ 個、条件式は全体で $7(n+k-2)+2k-3$ 個となり条件式の数が増える。そこで、 $m=2k+1$ の場合には挿入した点のうちひとつの点においては座標の値のうち1つだけを未知数として扱うとする。そうすることで、未知数は全体で $7(n+k-2)+2(k-2)$ 個、条件式は全体で $7(n+k-2)+2(k-2)$ 個となり未知数と条件式の数が等しくなる。

[0419] 以上に述べた方法のように、追加される条件の数に合わせて、挿入した点の座標のうち未知数にする数を調整することで接線、法線、曲率以外の例えば接線回転角 $\alpha$ を制御する場合などの種々の場合でも未知数と条件式の数をあわせることができ、理論上両端点の各値を制御することができる。また、制御項目と未知数、条件式の数についてまとめたものを表24に記す。

[0420] [表24]



n 点の補間における両端での制御項目と未知数、条件式の数

制御したい 項目数	増える 条件式	挿入する 点の数	一点につき 未知数として 扱う座標の数	増える 未知数
4	0	0	0	0
5	1	1	1	1
6	2	1	2	2
7	3	2	1個の点 : 2 1個の点 : 1	3
⋮				
2k	2k-4	k-2	k-2個の点 : 2	2k-4
2k+1	2k-3	k-1	k-2個の点 : 2 1個の点 : 1	2k-3

※k : 2以上の自然数

[0421] (b) 手法

始点・終点で各値を制御する3次元クロソイドを用いた補間法は、図59及び図60に示されるように以下の流れで行われる。

Step1) 制御する条件のうち4つだけを用いて厳密に補間対象点を通り、かつ $G^2$ 連続な補間を行い曲線を生成する。

Step2) 生成された曲線上に新たな点を挿入し、条件式と未知数の数を調整する。

Step3) の曲線パラメータを初期値として、目的の条件を満たすような各曲線のパラメータの近似値をニュートン・ラプソン法によって求める。

[0422] 以下、各Stepについて説明を補足する。まずStep1においては、接線方向を制御するのであれば、(3)の手法を用いて曲線を生成する。また、接線方向を制御しない場合についても、その曲線のパラメータを求める際の初期値としては、(3)の手法と同じ初期値を用いる。

[0423] 次にStep2において新たな点を挿入し、条件と未知数の数の調整を行うことになる。この際、新たに挿入する点は、各補間対象点間において可能な限り1

つ以下になるようにする。また、挿入される点としては補間対象点同士を結ぶStep1で生成された3次元クロソイド線分の中間の点を挿入した。さらに、挿入される点は両端から順々に挿入していくものとする。つまり、最初に挿入されるのは始点とその隣の点の間と終点とその隣の点の間である。

[0424] 最後にStep3についてであるが、Step3で行うニュートン・ラプソン法のための初期値を新たに決定する必要がある。そのため、新たな点が挿入された曲線については、1-4で述べた3次元クロソイド曲線を分割する手法を用いて曲線を分割し、生成された曲線の各値から決定した。点が挿入されていない曲線については、Step1で生成した曲線の値をそのまま用いる。以上で、Step3における曲線の各パラメータの初期値を決定した。この初期値を用いて、ニュートン・ラプソン法によって得られたパラメータから3次元クロソイド曲線を生成し、点列間を目的の条件を満たすような3次元クロソイド曲線で補間を行った。

[0425] (C) 補間例

実際に両端での接線、法線、曲率を表25の条件で制御するように3次元クロソイド補間した例を示す。厳密に通るべき補間対象の点に通し番号を振り、 $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ とした。

[0426] [表25]

補間対象各点と始点・終点の条件

	座標	単位接線ベクトル	主法線ベクトル	曲率
$P_1$	(0, 0, 0)	$(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$	$(-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$	0.2
$P_2$	(4, -4, -4)	—	—	—
$P_3$	(8, -4, -5)	(1, 0, 0)	(0, -1, 0)	0.2

$$* \theta = -\frac{\pi}{6} \text{とする}$$

[0427] この条件で、実際に補間を行った結果を図61に示す。実線が3次元クロソイド曲線、破線・一点鎖線・二点鎖線・三点鎖線は各曲線の曲率半径変化パ

ターンを示している。また、図 6 2 に図 6 1 の曲線の種類を対応させた各曲線の始点からの移動距離と曲率の関係のグラフを記す。生成された曲線は、表 2 6 からわかるように与えた条件を満たしていることがわかる。

[0428] [表26]

与えた値と生成された曲線の始点・終点の接線、法線、曲率の差

		座標	単位接線ベクトル	主法線ベクトル	曲率
$P_1$	与えた値	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.8660, -0.5, 0.0}	{0.5, 0.8660, 0.0}	0.20
	生成曲線による値	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.8660, -0.5, 0.0}	{0.5000, 0.8660, 0.0}	0.20
	差	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	0
$P_3$	与えた値	{8.0, -4.0, -5.0}	{1.0, 0.0, 0.0}	{0.0, -1.0, 0.0}	0.20
	生成曲線による値	{8.0, -4.0, -5.0}	{1.0, 0.0, 0.0}	{0.0, -1.0, 0.0}	0.20
	差	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	0

[0429] (d) 中間点での値の制御

(b) の手法により、両端点における各値を制御しつつ、 $G^2$  連続な補間が行えるようになった。ここで、両端点でなく中間点において値を制御する場合について考える。

[0430] 例えば図 6 3 のような点列を補間する場合において、中間点  $P_0$  で接線、法線を制御することを考える。しかし、今まで述べてきた手法では中間点における値を制御することはできない。そこで、ここではこの点列を 2 つに分けることによって中間点での値を制御した。

[0431] すなわち、点列に対して一挙に補間を行うのではなく、中間点  $P_0$  を挟んで曲線  $C_1$  と  $C_2$  とに分けて補間を行う。その場合点  $P_0$  は、端点にあたることになるので (b) の手法を用いれば値を制御することができるようになる。

[0432] このように制御したい値のある点で区分を分け、その両端における値を制御して補間した結果生成される曲線を繋いでいけば、理論上、各点において接線・法線・曲率の制御可能な 3 次元クロソイド補間を行うことができる。

[0433] (5) 両端点での接線、法線、曲率を制御した3次元クロソイド補間

[0434] (a) 手法の流れ

始点・終点で各値を制御する3次元クロソイドを用いた補間法は、図64に示される以下の流れで行われる。以後、この流れに沿って説明する。

[0435] (b-1) 補間対象の点を与える

この例では3次元空間の3点  $\{0.0, 0.0, 0.0\}$ ,  $\{5.0, 5.0, 10.0\}$ ,  $\{10.0, 10.0, 5.0\}$  を与えた。その他各点に与えた接線、法線、曲率などの条件をまとめて表27に記した。

[0436] [表27]

補間対象各点と始点・終点の条件

	座標	単位接線ベクトル	主法線ベクトル	曲率
$P_1$	$(0.0, 0.0, 0.0)$	$\{0.0, 1.0, 0.0\}$	$\{1.0, 0.0, 0.0\}$	0.1
$P_2$	$(5.0, 5.0, 10.0)$	—	—	—
$P_3$	$(10.0, 10.0, 5.0)$	$\{1.0, 0.0, 0.0\}$	$\{0.0, -1.0, 0.0\}$	0.1

[0437] (b-2)  $r=4$ の3DDCSの生成

ニュートン・ラプソン法においては、解の探索を始める際に適当な初期値を与える必要がある。ここではその初期値を得るための準備をする。先行研究である3D Discrete Clothoid Splinesは、厳密に補間対象点を通り、曲率が始点からの移動距離に対して滑らかに変化するような性質を持っている。そこで、本研究では3次元クロソイド補間のための初期値を、図65のような  $r=4$ の3D Discrete Clothoid SplinesのポリゴンQを作り、そこから計算で決定した。また、実際にこの点列より生成されたポリゴンを図66に、頂点の座標を表28に載せた。

[0438] [表28]

生成されたポリゴンの頂点の座標

	頂点の座標
P <sub>1</sub>	{0.0, 0.0, 0.0}
	{0.4677, 0.4677, 3.1228}
	{0.9354, 0.9354, 6.2456}
	{2.3029, 2.3029, 9.4966}
P <sub>2</sub>	{5.0, 5.0, 10.0}
	{6.7095, 6.7095, 9.9244}
	{8.0655, 8.0655, 8.4732}
	{9.0327, 9.0327, 6.7366}
P <sub>3</sub>	{10.0, 10.0, 5.0}

[0439] (b-3) 初期値の決定

ニュートン・ラプソン法で解を求めるには、各未知数の初期値を決定する必要がある。本手法ではその値をb-2で生成したポリゴンQを使って、各未知数の近似値を求めて決定する。3D Discrete Clothoid Splinesでは各頂点のフレネ標構がすでに求まっている。そこで、b-2で生成したポリゴンQの単位接線方向ベクトル $t$ よりパラメータ $a_0$ ,  $b_0$ を求める。この接線方向ベクトル $t$ はポリゴンQを求めたときにすでに既知となっており、この $t$ と3次元クロソイド曲線の接線の式とにより、ポリゴンQの頂点の接線方向回転角 $\alpha$ ,  $\beta$ が求まる。これにより各曲線の $a_0$ ,  $b_0$ の初期値が求まる。また、始点から始まる3次元クロソイドセグメントにおいては、その値を与える。

[0440] [数115]

$$u = \begin{Bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{Bmatrix}$$

[0441] ここで、3D Discrete Clothoid Splinesは、頂点が等距離に並んでいることを考えると、図65の点 $q_{4i+1}$ では、曲線長変数 $S$ が $1/4$ であると近似することができる。同様に点 $q_{4(i+1)-1}$ では、曲線長変数 $S$ が $3/4$ であると近似することができる。これらを3次元クロソイド曲線の $\alpha$ の式とをあわせて考慮すると下記の式が成り立つ。

[0442] [数116]

$$\begin{cases} a0_{4i} + \frac{1}{4}a1_{4i} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a2_{4i} = a0_{4i+1} \\ a0_{4i} + \frac{3}{4}a1_{4i} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 a2_{4i} = a0_{4(i+1)-1} \end{cases}$$

[0443] この式は未知数が $a1_{4i}$ と $a2_{4i}$ の2次元連立方程式になっており、これを解いてパラメータ $a_1$ ,  $a_2$ の初期値とする。同様にパラメータ $b_1$ ,  $b_2$ の初期値も決定できる。

[0444] 残る未知数は曲線長 $h$ であるが、この初期値については3次元クロソイド曲線の曲率の式より算出する。3次元クロソイド曲線の曲率は、下記で表される。

[0445] [数117]

$$\kappa = \frac{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 \cos^2 \alpha}}{h}$$

この式を変形すると以下の式になり、 $h$ の初期値が決定される。

[数118]

$$h_{4i} = \frac{\sqrt{(a1_{4i} + 2a2_{4i})^2 + (b1_{4i} + 2b2_{4i})^2 \cos^2 (a0_{4i} + a1_{4i} + a2_{4i})}}{\kappa_{4(i+1)}}$$

[0446] 以上の方法で7つの3次元クロソイドパラメータについて初期値を決定することができる。

[0447] 実際にこの手法により求めた初期値を表29に記す。

[0448] [表29]

初期値

点 $P_1$ と $P_2$ と を結ぶ曲線	$a_0$	0.0 (既知)
	$a_1$	-0.2684
	$a_2$	1.0739
	$b_0$	$\pi/2$ (既知)
	$b_1$	0.0
	$b_2$	0.0
	$h$	12.7684
点 $P_2$ と $P_3$ と を結ぶ曲線	$a_0$	-0.1648
	$a_1$	3.2061
	$a_2$	-2.6327
	$b_0$	0.7853
	$b_1$	0.0
	$b_2$	0.0
	$h$	9.6752

[0449] (b-4) 厳密に各点を通り、 $G^2$ 連続な3次元クロソイド補間

(b-3) で決定した初期値を用いて $G^2$ 連続となるような条件下で各曲線のパラメータの近似値をニュートン・ラブソン法によって求める。これによって得られたパラメータから3次元クロソイドセグメントを生成し、点列間を3次元クロソイド曲線で補間することを行った。

[0450] ここで、3点の3次元クロソイド補間において、厳密に補間対象の点を通り、かつ $G^2$ 連続となるような条件について具体的な条件を考える。図67は点 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ の3次元クロソイド補間を示す。点 $P_1$ 、 $P_2$ 間を結ぶ曲線を曲線 $C_1$ 、点 $P_2$ 、 $P_3$ 間を結ぶ曲線を曲線 $C_2$ とすると、 $a_0$ と $b_0$ は既に既知であるから、未知数は、曲線 $C_1$ のパラメータ $a_1$ 、 $a_2$ 、 $b_1$ 、 $b_2$ 、 $h$ 、曲線 $C_2$ のパラメータ $a_0$ 、 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $b_0$ 、 $b_1$ 、 $b_2$ 、 $h$ の12個となる。以後説明にでてくる文字のサブスクリプトは各曲線のサブスクリプトに対応しており、各曲線における座標、接線回転角 $\alpha$ 、 $\beta$ 、法線、曲率を曲線長変数 $S$ の関数として $Px_i$ 、 $Py_i$ 、 $Pz_i$ 、 $\alpha_i$ 、 $\beta_i$ 、 $n_i$ 、 $\kappa_i$ のように表す。

[0451] まず、点 $P_1$ においては厳密に補間対象の点を通るという条件は3次元クロソ

イド曲線の定義から考えると、始点を与えた時点で必然的に達成される。また接線方向についても既に既知な値として与えるので点 $P_1$ における条件は特に指定しない。

[0452] 次に点 $P_2$ について考える。点 $P_2$ は曲線同士の接続点であり、 $G^2$ 連続になるには位置、接線、法線、曲率が連続する必要がある。つまり点 $P_2$ において成り立つべき条件は下記のようなになる。

[0453] [数119]

$$\begin{aligned} P_{x_1}(1) &= P_{x_2}(0) \\ P_{y_1}(1) &= P_{y_2}(0) \\ P_{z_1}(1) &= P_{z_2}(0) \\ \cos[\alpha_1(1) - \alpha_2(0)] &= 1 \\ \cos[\beta_1(1) - \beta_2(0)] &= 1 \\ n_1(1) \cdot n_2(0) &= 1 \\ \kappa_1(1) &= \kappa_2(0) \end{aligned}$$

[0454] 最後に点 $P_3$ について考える。点 $P_3$ は終点であり、満たすべき条件は位置、接線のみであるので以下の5つの条件が成り立つ。ここで $\alpha_3$ 、 $\beta_3$ は、与える終点における接線ベクトルを決める接線方向回転角 $\alpha$ 、 $\beta$ であるとする。

[0455] [数120]

$$\begin{aligned} P_{x_2}(1) &= P_{x_3} \\ P_{y_2}(1) &= P_{y_3} \\ P_{z_2}(1) &= P_{z_3} \\ \cos[\alpha_2(1) - \alpha_3] &= 1 \\ \cos[\beta_2(1) - \beta_3] &= 1 \end{aligned}$$

[0456] 以上より、未知数 $a1_1$ ,  $a2_1$ ,  $b1_1$ ,  $b2_1$ ,  $h_1$ ,  $a0_2$ ,  $a1_2$ ,  $a2_2$ ,  $b0_2$ ,  $b1_2$ ,  $b2_2$ ,  $h_2$ の12個に対して、条件式は下記の12個が成り立つことがわかる。まとめると成り立つ条件式は下記のようなになる。

[0457] [数121]



$$\begin{aligned}
P_{x_1}(1) &= P_{x_2}(0) \\
P_{y_1}(1) &= P_{y_2}(0) \\
P_{z_1}(1) &= P_{z_2}(0) \\
\cos[\alpha_1(1) - \alpha_2(0)] &= 1 \\
\cos[\beta_1(1) - \beta_2(0)] &= 1 \\
n_1 \cdot n_2 &= 1 \\
\kappa_1(1) &= \kappa_2(0) \\
P_{x_2}(1) &= P_{x_3} \\
P_{y_2}(1) &= P_{y_3} \\
P_{z_2}(1) &= P_{z_3} \\
\cos[\alpha_2(1) - \alpha_3] &= 1 \\
\cos[\beta_2(1) - \beta_3] &= 1
\end{aligned}$$

[0458] これでは未知数12個について12個の式が成り立つので解を求めることができる。この式をニュートン・ラプソン法によって解き、解を求めた。表30に初期値と解を記す。

[0459] [表30]

初期値と解

		初期値	解
点P <sub>1</sub> とP <sub>2</sub> とを 結ぶ曲線C <sub>1</sub>	$a_0$	0.0 (既知)	—
	$a_1$	-0.2684	-5.4455
	$a_2$	1.0739	5.4122
	$b_0$	$\pi/2$ (既知)	—
	$b_1$	0.0	-3.8590
	$b_2$	0.0	3.1003
	$h$	12.7684	13.5862
点P <sub>2</sub> とP <sub>3</sub> とを 結ぶ曲線C <sub>2</sub>	$a_0$	-0.1648	-0.033258
	$a_1$	3.2061	3.6770
	$a_2$	-2.6327	-3.6437
	$b_0$	0.7853	0.8120
	$b_1$	0.0	1.6006
	$b_2$	0.0	-2.4126
	$H$	9.6752	9.2873

## [0460] (b-5) 曲線の生成

図 6 8 は (b-4) で求めたパラメータを元に生成した曲線と b-2 で生成したポリゴンとを同時に表示したものである。実線の曲線が曲線  $C_1$ 、破線の曲線が曲線  $C_2$  である。この段階では始点・終点で接線方向を制御した G2 連続な 3 次元クロソイド曲線になっている。

## [0461] (b-6) 条件式と未知数

ここで、さらに始点  $P_1$  と終点  $P_3$  における法線と曲率も表 2 7 で与えた値にすることを考える。始点・終点でさらに法線と曲率を制御するには、始点と終点における条件をそれぞれ 2 つ増やす必要がある。しかし、条件が 4 つ増えた状態では未知数の数との関係からその条件を満たす解を求めることが出来ない。そこで、未知数と条件式の数を合わせるために、図 6 9 に示されるように曲線  $C_1$  の曲線長変数  $S = 0.5$  の位置に点  $DP_1$  を新たに挿入した。また、曲線  $C_2$  についても曲線長変数  $S = 0.5$  の位置に点  $DP_2$  を新たに挿入した。

[0462] このとき、点  $P_1$  と点  $DP_1$  を結ぶ曲線を曲線  $C'_1$ 、点  $DP_1$  と点  $P_2$  を結ぶ曲線を曲線  $C'_2$ 、点  $P_2$  と点  $DP_2$  を結ぶ曲線を曲線  $C'_3$ 、点  $DP_2$  と点  $P_3$  を結ぶ曲線を曲線  $C'_4$  とする。以後説明にでてくる文字のサブスクリプトは各曲線名に対応しており、例えば曲線  $C$  における座標、接線回転角  $\alpha$ 、 $\beta$ 、法線、曲率を曲線長変数  $S$  の関数として  $Px_c$ ,  $Py_c$ ,  $Pz_c$ ,  $\alpha_c$ ,  $\beta_c$ ,  $n_c$ ,  $\kappa_c$  のように表す。また、始点・終点においては、座標、接線回転角  $\alpha$ 、 $\beta$ 、法線、曲率を始点では  $Px_s$ ,  $Py_s$ ,  $Pz_s$ ,  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$ ,  $n_s$ ,  $\kappa_s$ 、終点では  $Px_e$ ,  $Py_e$ ,  $Pz_e$ ,  $\alpha_e$ ,  $\beta_e$ ,  $n_e$ ,  $\kappa_e$  のように表す。

[0463] 以下に各点において成り立つ条件を記す。

[0464] [数122]

点  $P_1$  : 接線、法線、曲率 : 4 個

$$\cos[\alpha_{C'1}(0) - \alpha_s] = 1$$

$$\cos[\beta_{C'1}(0) - \beta_s] = 1$$

$$n_{C'1}(0) \cdot n_s = 1$$

$$\kappa_{C'1}(0) = \kappa_s$$

5 点  $DP_1$  : 位置、接線、法線、曲率 : 7 個

$$Px_{C'1}(1) = Px_{C'2}(0)$$

$$Py_{C'1}(1) = Py_{C'2}(0)$$

$$Pz_{C'1}(1) = Pz_{C'2}(0)$$

$$\cos[\alpha_{C'1}(1) - \alpha_{C'2}(0)] = 1$$

$$\cos[\beta_{C'1}(1) - \beta_{C'2}(0)] = 1$$

$$n_{C'1}(1) \cdot n_{C'2}(0) = 1$$

$$\kappa_{C'1}(1) = \kappa_{C'2}(0)$$

点  $P_2$  : 位置、接線、法線、曲率 : 7 個

$$Px_{C'2}(1) = Px_{C'3}(0)$$

$$Py_{C'2}(1) = Py_{C'3}(0)$$

$$Pz_{C'2}(1) = Pz_{C'3}(0)$$

$$\cos[\alpha_{C'2}(1) - \alpha_{C'3}(0)] = 1$$

$$\cos[\beta_{C'2}(1) - \beta_{C'3}(0)] = 1$$

$$n_{C'2}(1) \cdot n_{C'3}(0) = 1$$

$$\kappa_{C'2}(1) = \kappa_{C'3}(0)$$

点  $DP_2$  : 位置、接線、法線、曲率 : 7 個

$$Px_{C'3}(1) = Px_{C'4}(0)$$

$$Py_{C'3}(1) = Py_{C'4}(0)$$

$$Pz_{C'3}(1) = Pz_{C'4}(0)$$

$$\cos[\alpha_{C'3}(1) - \alpha_{C'4}(0)] = 1$$

$$\cos[\beta_{C'3}(1) - \beta_{C'4}(0)] = 1$$

$$n_{C'3}(1) \cdot n_{C'4}(0) = 1$$

$$\kappa_{C'3}(1) = \kappa_{C'4}(0)$$

点  $P_3$  : 位置、接線、法線、曲率 : 7 個

$$Px_{C'4}(1) = Px_e$$

$$Py_{C'4}(1) = Py_e$$

$$Pz_{C'4}(1) = Pz_e$$

$$\cos[\alpha_{C'4}(1) - \alpha_e] = 1$$

$$\cos[\beta_{C'4}(1) - \beta_e] = 1$$

$$n_{C'4}(1) \cdot n_e = 1$$

$$\kappa_{C'4}(1) = \kappa_e$$

[0465] 以上より、全体で成り立つべき条件式は32個である。ここで、各曲線が持つクロソイドパラメータは $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h$ の7つずつであり、かつ、曲線が4本なので未知数は28個となる。しかし、これでは未知数と条件式の数が等しくないので、解を求めることが出来ない。そこで新たに挿入した2つの点 $DP_1, DP_2$ の $y, z$ 座標を未知数として扱い、未知数を4つ増やした。こうすることで未知数も条件式も32個となり、解を求めることができる。

[0466] (b-7) 初期値の決定2

(b-6)で立てた条件式を満たす解を求めるためにニュートン・ラプソン法を用いるが、その収束率を上げるために未知数の初期値を決定する。方法としては、図70のように(b-5)で生成した3次元クロソイド曲線を新しく挿入した点の前後で分割することにより、3次元クロソイド曲線を4本作り、そのクロソイドパラメータを与えた。

[0467] 曲線の分割法については、曲線 $C_1$ を曲線 $C'_1$ と曲線 $C'_2$ とに分割する方法を

説明すると、曲線 $C'_1$ のクロソイドパラメータ $h'$ ,  $a'_0$ ,  $a'_1$ ,  $a'_2$ ,  $b'_0$ ,  $b'_1$ ,  $b'_2$ は、曲線 $C$ のパラメータを用いて、下記の式で表せる。ここで $S_d$ は分割点における曲線長変数でここでは0.5である。

[0468] [数123]

$$\begin{cases} a'_0 = a_0 \\ a'_1 = a_1 S_d \\ a'_2 = a_2 S_d^2 \\ b'_0 = b_0 \\ b'_1 = b_1 S_d \\ b'_2 = b_2 S_d^2 \\ h' = h S_d \end{cases}$$

[0469] 次に分割点 $DP_1$ を始点とする曲線 $C'_2$ について考える。まず、曲線 $C_1$ と大きさ、形状が同じで向きが逆な曲線を曲線 $C''_1$ とすると、その曲線はのクロソイドパラメータ $h''$ ,  $a''_0$ ,  $a''_1$ ,  $a''_2$ ,  $b''_0$ ,  $b''_1$ ,  $b''_2$ は、曲線 $C_1$ の曲線のパラメータを用いて、下記の式で表せる。

[0470] [数124]

$$\begin{cases} P''_s = P(1) \\ a''_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \pi \\ a''_1 = -(a_1 + 2a_2) \\ a''_2 = a_2 \\ b''_0 = b_0 + b_1 + b_2 \\ b''_1 = -(b_1 + 2b_2) \\ b''_2 = b_2 \\ h'' = h \end{cases}$$

[0471] この曲線上において分割点 $DP_1$ は、 $DP_1 = C''_1 (1 - S_d)$ で表される。ここで曲線 $C''_1$ を点 $DP_1$ で分割することを考えると、その分割された曲線のうち点 $P_2$ を始点とする曲線 $C''_2$ は、曲線 $C_2$ と大きさ、形状が同じで向きが逆な曲線になっている。曲線 $C_1$ を生成した方法により曲線 $C''_2$ は、生成することがで

きる。ここで、さらに曲線 $C'_{2'}$ に対して大きさ、形状が同じで向きが逆な曲線を生成すれば、曲線 $C_2$ は生成することができる。

[0472] この曲線 $C_2$ のクロソイドパラメータ $h'_{1'}$ ,  $a'_{0'}$ ,  $a'_{1'}$ ,  $a'_{2'}$ ,  $b'_{0'}$ ,  $b'_{1'}$ ,  $b'_{2'}$ は、曲線 $C_0$ のパラメータを用いて下記の式で表される。

[0473] [数125]

$$\begin{cases} a''_0 = a_0 + a_1 S_d + a_2 S_d^2 \\ a''_1 = (1 - S_d) \{a_1 + 2a_2 S_d\} \\ a''_2 = a_2 (1 - S_d)^2 \\ b''_0 = b_0 + b_1 S_d + b_2 S_d^2 \\ b''_1 = (1 - S_d) \{b_1 + 2b_2 S_d\} \\ b''_2 = b_2 (1 - S_d)^2 \\ h'' = h(1 - S_d) \end{cases}$$

[0474] 以上の方法で、3次元クロソイド曲線 $C_1$ 上の曲線長変数が $S = 0.5$ である点 $DP_1$ で曲線 $C_1$ を曲線 $C'_{1'}$ と $C'_{2'}$ とに分割することができる。同様の手法で、曲線 $C_2$ 上の曲線長変数が $S = 0.5$ である点 $DP_2$ で曲線 $C_2$ を曲線 $C'_{3'}$ と $C'_{4'}$ とに分割することができる。

[0475] この方法で分割した4つの曲線のパラメータを表31に載せた。この曲線のパラメータをb-6で立てた条件式を満たす解を求める際のニュートン・ラプソン法の初期値に用いた。

[0476] [表31]

分割により生成された曲線のパラメータ

曲線 $C'_1$	$a_0$	0.0 (既知)	曲線 $C'_2$	$a_0$	4.9134
	$a_1$	-2.7227		$a_1$	-0.016629
	$a_2$	1.3530		$a_2$	1.3530
	$b_0$	$\pi/2$ (既知)		$b_0$	0.41633
	$b_1$	-1.9295		$b_1$	-0.37938
	$b_2$	0.7750		$b_2$	0.77507
	$h$	6.7931		$h$	6.7931
	始点	{0.0, 0.0, 0.0}		始点	{1.8431, 3.0860, 4.9597}
曲線 $C'_3$	$a_0$	-0.033258	曲線 $C'_4$	$a_0$	7.1774
	$a_1$	1.8385		$a_1$	0.016629
	$a_2$	-0.91093		$a_2$	-0.91093
	$b_0$	0.81202		$b_0$	1.0091
	$b_1$	0.80031		$b_1$	-0.40601
	$b_2$	-0.60316		$b_2$	-0.60316
	$h$	4.6436		$h$	4.6436
	始点	{5.0, 5.0, 10.0}		始点	{7.0029, 8.1298, 7.5337}

[0477] (b-8) 条件を満たすクロソイドパラメータを求める

(b-7) で決定した初期値を元に、(b-6) で立てた条件式を満たす解をニュートン・ラプソン法で求めた。表 3 2 は算出された各曲線のパラメータである。また、表 3 3 は与えた値と生成された曲線の始点・終点の接線、法線、曲率の差を示したものである。

[0478] [表32]

## 生成された曲線のパラメータ

曲線 $C'_1$	$a_0$	0.0 (既知)	曲線 $C'_2$	$a_0$	5.3846
	$a_1$	0.0000		$a_1$	-3.4602
	$a_2$	-0.89854		$a_2$	4.341
	$b_0$	$\pi/2$ (既知)		$b_0$	0.47690
	$b_1$	-0.51836		$b_1$	-3.2143
	$b_2$	-0.57552		$b_2$	3.4613
	$h$	5.1836		$h$	9.9808
	始点	{0.0, 0.0, 0.0}		始点	{1.8431, 4.1726, 1.4653}
曲線 $C'_3$	$a_0$	-0.017740	曲線 $C'_4$	$a_0$	6.8553
	$a_1$	3.4572		$a_1$	-1.1443
	$a_2$	-2.8673		$a_2$	0.57219
	$b_0$	0.72385		$b_0$	0.76315
	$b_1$	2.4551		$b_1$	-1.1942
	$b_2$	-2.4158		$b_2$	0.43108
	$h$	6.60818		$h$	3.3206
	始点	{5.0, 5.0, 10.0}		始点	{7.0029, 9.0734, 5.6186}

[0479] [表33]

与えた値と生成された曲線の始点・終点の接線、法線、曲率の差

		座標	単位接線ベクトル	主法線ベクトル	曲率
$P_1$	与えた値	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 1.0, 0.0}	{1.0, 0.0, 0.0}	0.10
	生成曲線 による値	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 1.0, 0.0}	{1.0, 0.0, 0.0}	0.10
	差	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	0
$P_3$	与えた値	{10.0, 10.0, 5.0}	{1.0, 0.0, 0.0}	{0.0, -1.0, 0.0}	0.10
	生成曲線 による値	{10.0, 10.0, 5.0}	{1.0, 0.0, 0.0}	{0.0, -1.0, 0.0}	0.10
	差	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	{0.0, 0.0, 0.0}	0

[0480] (b-9) 曲線の生成



(b-8) で求めたパラメータにより生成された曲線を図 7 1 に示す。実線が 3 次元クロソイド曲線、破線・一点鎖線・二点鎖線・三点鎖線は各曲線の方向を主法線方向に、大きさを曲率半径に自然対数を足して対数を取った曲率半径変化パターンを示している。また、図 7 2 に図 7 1 の線の種類に対応させた各曲線の始点からの移動距離  $s$  と曲率  $\kappa$  の関係のグラフを記す。生成された曲線は、表 3 3 からわかるように与えた条件を満たしていることがわかる。

[0481] 以上で、両端で接線、法線、曲率を制御した 3 次元クロソイド補間法による曲線生成の例を記した。

[0482] 3. 3 次元クロソイド補間を用いた数値制御方式

上記の 3 次元クロソイド補間曲線は、工作機械の工具やその他の運動対象物の運動制御のための数値制御情報の発生に有効に用いられる。その特徴は、速度制御が容易なこと、及び、速度変化を滑らかにすることが可能なことである。

[0483] (1) 3 次元クロソイド補間を用いた数値制御方式

3 次元クロソイド補間曲線を用いた数値制御方式は、図 7 3 に示される次の手順からなる。

[0484] (a) 工具運動軌跡の設計 (図 7 3、S 1)

前節に述べた手法により、条件を満たす 3 次元クロソイド補間曲線を決定する。ロボット等の工具が動くとき、その工具の代表点 (工具点、tool center point) は平面的あるいは空間的に描かれた連続な軌跡曲線 (直線を含む) の上を時間的に移動すると考えることができる。工具点の位置は、座標 ( $x$ 、 $y$ 、 $z$ ) で表され、工具点の姿勢は、例えば  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸に対する回転角度で表される。どのような複雑な動きでも、工具点の軌跡は途切れ途切れになることなく、連続的に繋がっている。運動制御の第 1 段階は、この軌跡の形状を、3 次元クロソイド曲線に設計することにある。

[0485] (b) 運動曲線の当てはめ (図 7 3、S 2)

数値制御からの要求により、3 次元クロソイド補間曲線に沿って、曲線上の

制御対象点の移動速度の分布を指定する。すなわち、運動制御の第2段階は、設計された軌跡上を動く工具点の速度・加速度を決定することである。軌跡上を工具点がどのような時間の関数として動くかは、工具点の速度・加速度を決定することで定められる。工具点の速度・加速度は、時間に対して決定される場合と、軌跡の形状に付随して決定される場合がある。一般的には時間に対して決定される場合が多いが、例えば曲面加工をする場合、平らな部分では高速で移動させ、曲がっている部分では低速で移動させたいという要請から、軌跡の形状に付随して速度が決定される。

[0486] 本実施形態においては、例えばカム機構に採用されている特性の良い曲線を採用する。カルテシアン空間（実在空間）で定義された位置・姿勢は連続した曲線群を構成しているが、その一つ一つの曲線に運動曲線を当てはめ、加減速を指定する。カルテシアン空間とは、原点で互いに直交する  $x$ 、 $y$ 、 $z$  の3軸を用いてつくられる3次元座標系であり、工具点の位置のみならず姿勢も表すことができる。

[0487] (c) 時分割（図73、S3）及びカルテシアン座標系による工具の位置・姿勢の計算（図73、S4）

ここでは、数値制御情報を計算する単位時間ごとに、制御対象の指定された移動速度に従って、工具点の移動位置及び姿勢を算出する。軌跡と運動が確定したので、工具点の位置・姿勢が時間  $t$  の関数として与えられたことになる。これにより、時間  $t$  を微小時間間隔で与えたとき、それぞれの時刻に対する工具点の変位を求めることができる。(c)の計算は、具体的には以下のように行なわれる。現在点においては、位置情報や接線、曲率などの値がわかっている。指定された移動速度に単位時間を乗ずれば、単位時間中の移動曲線長がわかり、これにより移動後の曲線長パラメータが計算できる。この移動後の曲線長パラメータにより、移動後の点における位置情報や接線、曲率などの値を計算することが出来る。

[0488] 以上の手続きによって、カルテシアン座標系（実在空間）における時間  $t$  に対する工具点の位置と姿勢が計算される。変数としては、3次元では（ $x$

、 $y$ 、 $z$ 、 $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\nu$ 、 $\theta$ ）となる。ただし、 $(\lambda, \mu, \nu, \theta)$  は姿勢Eを等価回転で表したもので $(\lambda, \mu, \nu)$  は等価回転の軸を、 $\theta$  は回転角を示す。

[0489] また、数値制御からの要求により、3次元クロソイド補間曲線に沿って、法線方向へ指定寸法だけオフセットしたオフセット点を求めて、これをカッターパス（工具中心の軌跡）とする。この計算も、法線方向が求まっているので、容易である。

[0490] (d) 逆機構解（図73、S5）

次に、上記の工具点の位置・姿勢を与えるために必要な各軸の回転角を求める。この過程は一般に逆機構解（inverse kinematics）と呼ばれている。例えば6軸のロボットがあるとする、関節が6つあるので、肩の関節、腕の関節、ひじの関節、手首の関節等が何度回転したかで工具点の位置・姿勢が決まる。これが順機構解と呼ばれる。逆機構解は、これとは反対に実在の空間の位置・姿勢から軸空間の回転角 $\theta_1 \sim \theta_6$ を求めるものである。各軸のアクチュエータは回転モータであるとは限らず、リニアモータ等の直動アクチュエータである場合もあるが、その場合でも最低限度実変位をリニアモータの入力パルス数に変換する電子ギアの計算が必要となる。逆機構解は、ロボット等の機構の型ごとに固有なので、種々のロボット等について個別に解を用意しておく。

[0491] (e) 軸座標系による各軸モータ変位の計算（図73、S6）

時分割された各工具点につき逆機構解を求め、これを各軸モータ（直動アクチュエータを含む）の変位パルスとして整数化する。パルス制御でない場合には、各軸変位の最少分解単位（分解能）を用いて、パルス数相当の整数化されたデータとして求める。

[0492] 上記、(a) 及び (b) は準備的な手順であり、一度だけ行なわれる。(c) ～ (e) は、指定された単位時間ごとに実行され、目的時間あるいは目的の条件を満たすまで続行される。

[0493] 上記の全ての計算を、数値制御装置の中で行うことも可能であり、あるい

は、(a)及び(b)を別のコンピュータ（計算機）により計算及び設定しておき、その曲線パラメータなどを数値制御装置に送り込み、(c)〜(e)の計算を数値制御装置内で行うこともできる。

[0494]     (2) NC装置とCNC装置

以下、独立の数値制御装置（NC装置）を使用する場合と、プログラムの役割を持ったコンピュータとNC装置とが一体化されたCNC装置を使用する場合について説明する。

[0495]     (a) 独立のNC装置を用いる場合

従来の通常のNC機械では、プログラミングを行ってNCデータを作成するプログラムと、このNCデータを用いて機械装置を動かすNC装置との二つの装置にハードウェアが分離されている。それに対して、最近のCNC機械では、プログラミングを行うコンピュータはNC装置に内蔵されて、一体化されたものとなっている。

[0496]     まず、前者の、独立のNC装置を用いる場合について、3次元クロソイドによる数値制御方式を提案する。この場合、クロソイドデータの受け渡しにはクロソイドパラメータを用いるものとし、Gコードの中にクロソイドのフォーマットを定義する。これは例えば、次のようなものである。

G \* \* \*

A0, A1, A2, B0, B1, B2, H

[0497]     ここで、G \* \* \*はGコードの番号を示す。A0〜Hは3次元クロソイドセグメントの7つのパラメータを示す。このコードを実行する前に、工具はP<sub>0</sub>の位置に来ている。NC装置ではこのパラメータを用いて、瞬時の工具位置または工具位置の差分を計算して実行する。この操作を「順解」という。順解をNC装置側で行う理由はデータの大量化を防ぐ目的からであるが、そのためにNC装置では、ある種の演算を必要とする。Gコードでクロソイドを表現することによって、既設のNC装置にクロソイド曲線を組み込むことが可能となる。

[0498]     (b) CNC方式

プログラムの役割を持ったコンピュータとNC装置との一体化されたCNC装置の場合について述べる。この場合、クロソイドに関する計算がどの部分のハードで行われるかは問題にならない。また、データの量や転送のスピードも解決されつつある。

[0499] 一般に、このプログラムには、それぞれの条件に適したクロソイドのパラメータを決定する過程が含まれる。これを「逆解」という。逆解の中には、例えば、いくつかの離散的な点列を与えて、これらの点を厳密に通る滑らかな曲線を計算するプログラム（自由点列補間）も含まれる。また、加工上必要となる工具軌跡の決定プログラム（いわゆるCAM）も含まれることが多い。

[0500] (3) 3次元クロソイド補間を用いた数値制御方式の特徴

3次元クロソイド補間を用いた数値制御方式には、次のような利点がある。

[0501] (a) 上記のように、曲線が基準点からの曲線長を独立パラメータとして表現されているので、指定された移動速度に対応する数値制御情報を生成することが出来る。曲線長とは無関係な独立パラメータにより表現されているスプライン曲線などの他の曲線では、移動後の点が算出できても、その点に対応する独立パラメータの値を算出することが困難であり、指定された移動速度に対応する数値制御情報を生成することが容易ではない。

[0502] これを詳述するに、図74に示されるように、スプライン曲線 $R(t)$ で表現される軌跡上の点 $R_0$ から工具をある線速度で運動させる場合を考える。一定時間間隔毎に工具の目標点を算出するとき、単位時間経過後の工具の移動量 $\Delta S$ はわかるが、独立変数 $t$ は時間とか曲線長とかに関係するものではないので、独立変数の変化量 $\Delta t$ は直ちには求めることはできない。 $R_0 + \Delta S = R(t_0 + \Delta t)$ の式を解いて $\Delta t$ を求めなければ、目標点を算出することができないので、一定時間間隔毎にこの計算を繰り返さなければならないことになる。

[0503] (b) 3次元クロソイド曲線では、曲線長に対する曲率の変化の仕方が、近似的に一定であることが期待され、これに対応する数値制御情報は、運動制御

の観点から、力学的に無理の少ない制御情報となることが期待される。一般のスプライン補間などでは、曲率変化を予測・制御することは困難である。

[0504] (c) 3次元クロソイド曲線は、その特殊な場合として、直線、円弧、螺旋曲線などを含んでおり、個別の曲線式を組み込むことなく、多様な曲線に対する数値制御情報を厳密に表現することが出来る。

[0505] (d) 3次元クロソイド曲線は座標軸のとり方によらない自然方程式である。 $x, y, z$ 軸で曲線が表される従来のNC装置では、例えばワークを斜めに傾けて加工するときに、ワークの取り付け方によっては、斜めの面を加工しやすかったり、加工しにくかったりすることがある。3次元クロソイド曲線では、曲線が線長によって与えられるので、斜めの面を加工する場合でも、斜めの面上に軌跡を作成すれば、水平面を加工するのと同様に加工できる。

[0506] なお本発明の、接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる3次元曲線（3次元クロソイド曲線という）を用いて工具軌跡またはワークの輪郭形状を表現するプログラムをコンピュータで実行する際には、コンピュータのハードディスク装置等の補助記憶装置にプログラムを格納しておき、メインメモリーにロードして実行する。また、そのようなプログラムは、CD-ROM等の可搬型記録媒体にプログラムを格納して売買したり、ネットワークを介して接続されたコンピュータの記録装置に格納しておき、ネットワークを通じて他のコンピュータに転送することもできる。また、そのようなプログラムによる計算結果（3次元クロソイド曲線の曲線パラメータ、各軸モータの変位パルス等）をCD-ROM等の可搬型記録媒体に格納して売買することもできる。

#### 産業上の利用可能性

[0507] 本発明の3次元クロソイド曲線によれば、工業製品の設計生産に必要な空間曲線の汎用的な発生方法を提供することができる。空間曲線に沿って物体が加減速を伴って運動する場合に、拘束力変化が滑らかな設計を可能とする。この特徴は、質量を有する機械要素の運動の軌道を設計する方法に広く応用される。今回は設計の応用例としてボールねじの回帰経路の設計方法

について説明したが、この他にも幅広く、例えば上下左右に曲りくねったレール上を急スピードで走るジェットコースターのレールの設計方法、リニアガイド等にも応用できる。これ以外にも、曲線長に対して曲率の変化を適切に設計できることにより、審美的な意匠曲線設計など、様々な産業分野に有効に適用される。

### 請求の範囲

- [1] 接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる３次元曲線（３次元クロソイド曲線という）を用いて工業製品の形状を設計することを特徴とする工業製品の設計方法。
- [2] 前記工業製品は、質量を有する機械要素が運動する機構を含む機械であり、  
前記３次元曲線（３次元クロソイド曲線という）を用いて前記機械要素の運動の軌道を設計することを特徴とする請求項１に記載の工業製品の設計方法。
- [3] 前記機械は、前記機械要素としてボールが運動する機構を含むねじ装置であり、  
前記ねじ装置は、外周面に螺旋状の転動体転走溝を有するねじ軸と、内周面に前記転動体転走溝に対向する負荷転動体転走溝を有すると共に前記負荷転動体転走溝の一端と他端を接続する回帰経路を有するナットと、前記ねじ軸の前記転動体転走溝と前記ナットの前記負荷転動体転走溝の間及び回帰経路に配列される複数の転動体と、を備え、  
前記３次元曲線（３次元クロソイド曲線という）を用いて、前記ねじ装置の前記回帰経路を設計することを特徴とする請求項２に記載の工業製品の設計方法。
- [4] 前記３次元クロソイド曲線を以下の式で定義する請求項１ないし３いずれかに記載の工業製品の設計方法。

[数126]



$$P = P_0 + \int_0^s u ds = P_0 + h \int_0^S u dS, \quad 0 \leq s \leq h, \quad 0 \leq S = \frac{s}{h} \leq 1 \quad (1)$$

$$u = E^{k\beta} E^{j\alpha} (i) = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\alpha = a_0 + a_1 S + a_2 S^2 \quad (3)$$

$$\beta = b_0 + b_1 S + b_2 S^2 \quad (4)$$

ここで、

[数127]

$$P = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad P_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

はそれぞれ、3次元クロソイド曲線上の点の位置ベクトル、及びその初期値を示す。

始点からの曲線の長さを $s$ とし、その全長（始点から終点までの長さ）を $h$ とする。 $s$ を $h$ で割った値を $S$ で表わす。 $S$ は無次元の値であり、これを曲線長変数と呼ぶ。

$i$ ,  $j$ ,  $k$ はそれぞれ、 $x$ 軸、 $y$ 軸、及び $z$ 軸方向の単位ベクトルである。

$u$ は点 $P$ における曲線の接線方向を示す単位ベクトルであり、式(2)によって与えられる。 $E^{k\beta}$ 及び $E^{j\alpha}$ は回転マトリクスであり、それぞれ、 $k$ 軸まわりの角度 $\beta$ の回転及び $j$ 軸まわりの角度 $\alpha$ の回転を表わしている。前者をヨー(yaw)回転、後者をピッチ(pitch)回転という。式(2)は、 $i$ 軸方向の単位ベクトル

を、まず  $j$  軸まわりに  $\alpha$  だけ回し、しかるのちに  $k$  軸まわりに  $\beta$  だけ回すことによって、接線ベクトル  $u$  が得られることを示している。

$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  は定数。

- [5] 3次元座標内に複数の空間点を指定し、これらの空間点を前記3次元クロソイド曲線を用いて補間することによって、前記工業製品の形状を設計することを特徴とする請求項4に記載の工業製品の設計方法。

- [6] 前記複数の空間点において、一つの3次元クロソイド線分（補間によって生成される曲線群を構成する単位曲線）と次の3次元クロソイド線分（補間によって生成される曲線群を構成する単位曲線）とで、両者の位置、接線方向、法線方向及び曲率が連続するように、前記3次元クロソイド線分の7つのパラメータ  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h$  を算出することを特徴とする請求項5に記載の工業製品の設計方法。

- [7] 前記複数の空間点のうちの始点及び終点の接線方向、法線方向及び曲率を指定し、

あらかじめ指定された前記空間点の間に新たに補間対象点を挿入することによって、

前記始点及び前記終点における接線方向、法線方向及び曲率の条件式と、前記複数の空間点における、一つの3次元クロソイド線分と次の3次元クロソイド線分とで両者の位置、接線方向、法線方向及び曲率を連続させる条件式と、を合算した条件式の数と、前記3次元クロソイド線分の7つのパラメータ  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h$  の未知数と、を一致させ、

条件式と未知数との数を一致させることによって、前記3次元クロソイド線分の7つのパラメータ  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h$  を算出することを特徴とする請求項6に記載の工業製品の設計方法。

- [8] 請求項1ないし7いずれかの工業製品の設計方法により設計された工業製品。

- [9] 工業製品の形状を設計するために、  
コンピュータを、

接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる３次元曲線（３次元クロソイド曲線という）を用いて工業製品の形状を設計する手段として機能させるためのプログラム。

- [10] 工業製品の形状を設計するために、  
コンピュータを、

接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる３次元曲線（３次元クロソイド曲線という）を用いて工業製品の形状を設計する手段として機能させるためのプログラムを記録したコンピュータ読み取り可能な記録媒体。

- [11] 接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる３次元曲線（３次元クロソイド曲線という）を用いて工具軌跡またはワークの輪郭形状を表現し、この３次元曲線によって工具の運動を制御する数値制御方法。

- [12] ３次元クロソイドを以下の式で定義する請求項 １ １に記載の数値制御方法。

[数128]

$$P = P_0 + \int_0^s u ds = P_0 + h \int_0^S u dS, \quad 0 \leq s \leq h, \quad 0 \leq S = \frac{s}{h} \leq 1 \quad (1)$$

$$u = E^k \beta E^j \alpha (i) = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\alpha = a_0 + a_1 S + a_2 S^2 \quad (3)$$

$$\beta = b_0 + b_1 S + b_2 S^2 \quad (4)$$

ここで、

[数129]

$$P = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad P_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

はそれぞれ、3次元クロソイド曲線上の点の位置ベクトル、及びその初期値を示す。

始点からの曲線の長さを $s$ とし、その全長（始点から終点までの長さ）を $h$ とする。 $s$ を $h$ で割った値を $S$ で表わす。 $S$ は無次元の値であり、これを曲線長変数と呼ぶ。

$i$ ,  $j$ ,  $k$ はそれぞれ、 $x$ 軸、 $y$ 軸、及び $z$ 軸方向の単位ベクトルである。

$u$ は点 $P$ における曲線の接線方向を示す単位ベクトルであり、式(2)によって与えられる。 $E^{k\beta}$ 及び $E^{j\alpha}$ は回転マトリクスであり、それぞれ、 $k$ 軸まわりの角度 $\beta$ の回転及び $j$ 軸まわりの角度 $\alpha$ の回転を表わしている。前者をヨー(yaw)回転、後者をピッチ(pitch)回転という。式(2)は、 $i$ 軸方向の単位ベクトルを、まず $j$ 軸まわりに $\alpha$ だけ回し、しかるのちに $k$ 軸まわりに $\beta$ だけ回すことによって、接線ベクトル $u$ が得られることを示している。

$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ は定数。

- [13] 接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる3次元曲線（3次元クロソイド曲線という）を用いて工具軌跡またはワークの輪郭形状を表現し、この3次元曲線によって工具の運動を制御する数値制御装置。

- [14] 工具の運動を数値制御するために、  
コンピュータを、

接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる3次元曲線（3次元クロソイド曲線という）を用いて工具軌跡またはワークの輪郭形状を表現する手段として機能させるためのプログラム。

- [15] 工具の運動を数値制御するために、

コンピュータを、

接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる３次元曲線（３次元クロソイド曲線という）を用いて工具軌跡またはワークの輪郭形状を表現する手段として機能させるためのプログラム又はそのプログラムによる計算結果を記録したコンピュータ読み取り可能な記録媒体。

- [16] ３次元座標内に任意に与えられた点列間を、接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる３次元クロソイド曲線（３次元クロソイドセグメント）を用いて補間し、この３次元クロソイドセグメントによって工具の運動を制御する数値制御方法。
- [17] 接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる３次元クロソイド曲線（３次元クロソイドセグメント）を複数本接続し、この複数本の３次元クロソイドセグメントによって工具の運動を制御する数値制御方法。
- [18] ３次元クロソイド曲線を以下の式で定義する請求項１６又は１７に記載の数値制御方法。

[数130]

$$P = P_0 + \int_0^s u ds = P_0 + h \int_0^S u dS, \quad 0 \leq s \leq h, \quad 0 \leq S = \frac{s}{h} \leq 1 \quad (1)$$

$$u = E^{k\beta} E^{j\alpha} (i) = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\alpha = a_0 + a_1 S + a_2 S^2 \quad (3)$$

$$\beta = b_0 + b_1 S + b_2 S^2 \quad (4)$$

ここで、

[数131]

$$P = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad P_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

はそれぞれ、3次元クロソイド曲線上の点の位置ベクトル、及びその初期値を示す。

始点からの曲線の長さを $s$ とし、その全長（始点から終点までの長さ）を $h$ とする。 $s$ を $h$ で割った値を $S$ で表わす。 $S$ は無次元の値であり、これを曲線長変数と呼ぶ。

$i$ ,  $j$ ,  $k$ はそれぞれ、 $x$ 軸、 $y$ 軸、及び $z$ 軸方向の単位ベクトルである。

$u$ は点 $P$ における曲線の接線方向を示す単位ベクトルであり、式(2)によって与えられる。 $E^{k\beta}$ 及び $E^{j\alpha}$ は回転マトリクスであり、それぞれ、 $k$ 軸まわりの角度 $\beta$ の回転及び $j$ 軸まわりの角度 $\alpha$ の回転を表わしている。前者をヨー(yaw)回転、後者をピッチ(pitch)回転という。式(2)は、 $i$ 軸方向の単位ベクトルを、まず $j$ 軸まわりに $\alpha$ だけ回し、しかるのちに $k$ 軸まわりに $\beta$ だけ回すことによって、接線ベクトル $u$ が得られることを示している。

$a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ は定数。

[19] 一つの3次元クロソイドセグメントと次の3次元クロソイドセグメントの継ぎ目において、両者の位置、接線方向（及び場合によっては曲率）が連続するように、前記3次元クロソイドセグメントの7つのパラメータ $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $h$ を算出することを特徴とする請求項18に記載の数値制御方法。

[20] 3次元座標内に任意に与えられた点列間を、接線方向のピッチ角およびヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる3次元クロソイドセグメントを用いて補間し、この3次元クロソイドセグメントによって工具の運動を制御する数値制御装置。

[21] 工具の運動を数値制御するために、

コンピュータを、

3次元座標内に任意に与えられた点列間を、接線方向のピッチ角およびヨ  
ー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる3次元クロ  
ソイドセグメントを用いて補間する手段として機能させるためのプログラム  
。

[22] 工具の運動を数値制御するために、

コンピュータを、

3次元座標内に任意に与えられた点列間を、接線方向のピッチ角およびヨ  
ー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる3次元クロ  
ソイドセグメントを用いて補間する手段として機能させるためのプログラム  
又はそのプログラムによる計算結果を記録したコンピュータ読み取り可能な  
記録媒体。

[23] 接線方向のピッチ角及びヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二  
次式で与えられる3次元曲線（3次元クロソイド曲線という）を用いて工具  
軌跡またはワークの輪郭形状を表現し、

前記3次元曲線に沿って移動する工具の運動を指定し、

指定された運動に従って単位時間毎に工具の移動位置を算出する数値制御  
方法。

ここで、運動とは、時間の関数として変化する位置情報をいう。

[24] 3次元クロソイド曲線を以下の式で定義する請求項23に記載の数値制御  
方法。

[数132]

$$P = P_0 + \int_0^s u ds = P_0 + h \int_0^S u dS, \quad 0 \leq s \leq h, \quad 0 \leq S = \frac{s}{h} \leq 1 \quad (1)$$

$$u = E^{k\beta} E^{j\alpha} (i) = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\alpha = a_0 + a_1 S + a_2 S^2 \quad (3)$$

$$\beta = b_0 + b_1 S + b_2 S^2 \quad (4)$$

ここで、

[数133]

$$P = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad P_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

はそれぞれ、3次元クロソイド曲線上の点の位置ベクトル、及びその初期値を示す。

始点からの曲線の長さを $s$ とし、その全長（始点から終点までの長さ）を $h$ とする。 $s$ を $h$ で割った値を $S$ で表わす。 $S$ は無次元の値であり、これを曲線長変数と呼ぶ。

$i$ ,  $j$ ,  $k$ はそれぞれ、 $x$ 軸、 $y$ 軸、及び $z$ 軸方向の単位ベクトルである。

$u$ は点 $P$ における曲線の接線方向を示す単位ベクトルであり、式(2)によって与えられる。 $E^{k\beta}$ 及び $E^{j\alpha}$ は回転マトリクスであり、それぞれ、 $k$ 軸まわりの角度 $\beta$ の回転及び $j$ 軸まわりの角度 $\alpha$ の回転を表わしている。前者をヨー(yaw)回転、後者をピッチ(pitch)回転という。式(2)は、 $i$ 軸方向の単位ベクトルを、まず $j$ 軸まわりに $\alpha$ だけ回し、しかるのちに $k$ 軸まわりに $\beta$ だけ回



すことによって、接線ベクトル  $u$  が得られることを示している。 $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  は定数。

- [25] 接線方向のピッチ角及びヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる3次元曲線（3次元クロソイド曲線という）を用いて工具軌跡またはワークの輪郭形状を表現し、

前記3次元曲線に沿って移動する工具の運動を指定し、

指定された運動に従って単位時間毎に工具の移動位置を算出する数値制御装置。

ここで、運動とは、時間の関数として変化する位置情報をいう。

- [26] 工具の運動を数値制御するために、  
コンピュータを、

接線方向のピッチ角及びヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる3次元曲線（3次元クロソイド曲線という）を用いて工具軌跡またはワークの輪郭形状を表現する手段と、

前記3次元曲線に沿って移動する工具の運動を指定する手段と、

指定された運動に従って単位時間毎に工具の移動位置を算出する手段、として機能させるためのプログラム。

ここで、運動とは、時間の関数として変化する位置情報をいう。

- [27] 工具の運動を数値制御するために、  
コンピュータを、

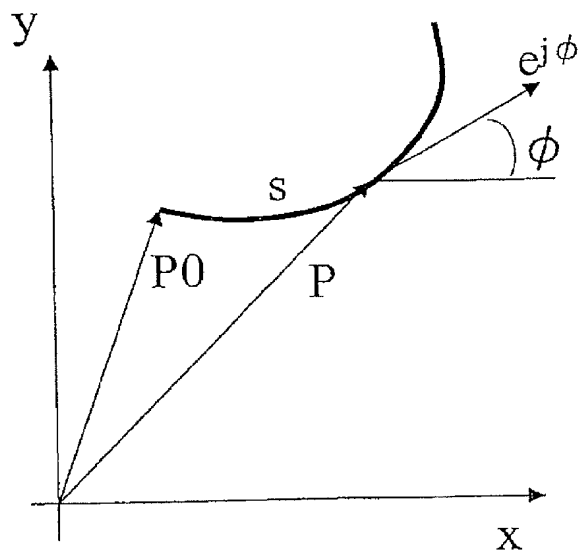
接線方向のピッチ角及びヨー角のそれぞれが曲線長または曲線長変数の二次式で与えられる3次元曲線（3次元クロソイド曲線という）を用いて工具軌跡またはワークの輪郭形状を表現する手段と、

前記3次元曲線に沿って移動する工具の運動を指定する手段と、

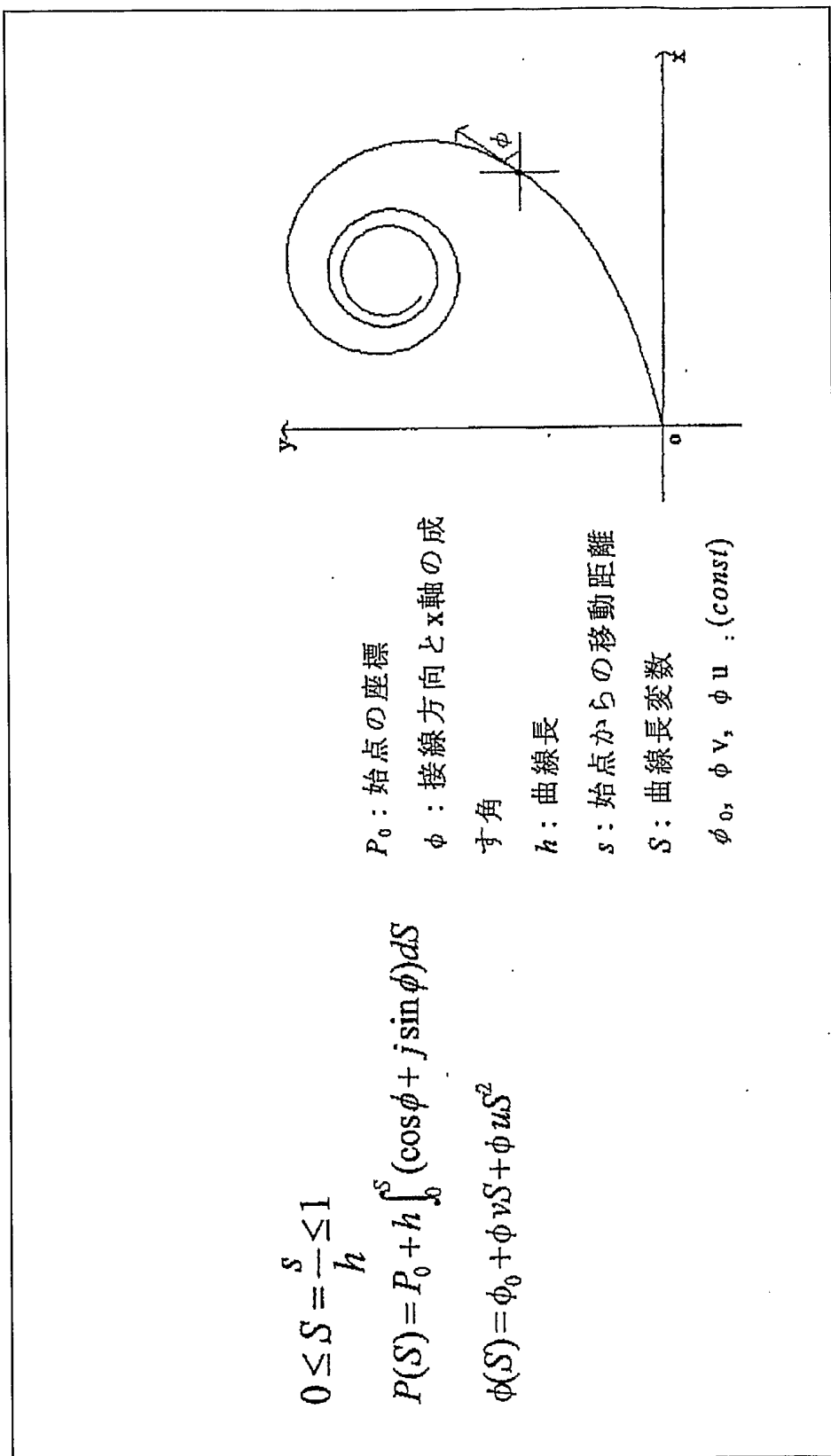
指定された運動に従って単位時間毎に工具の移動位置を算出する手段、として機能させるためのプログラムを記録したコンピュータ読み取り可能な記録媒体。

ここで、運動とは、時間の関数として変化する位置情報をいう。

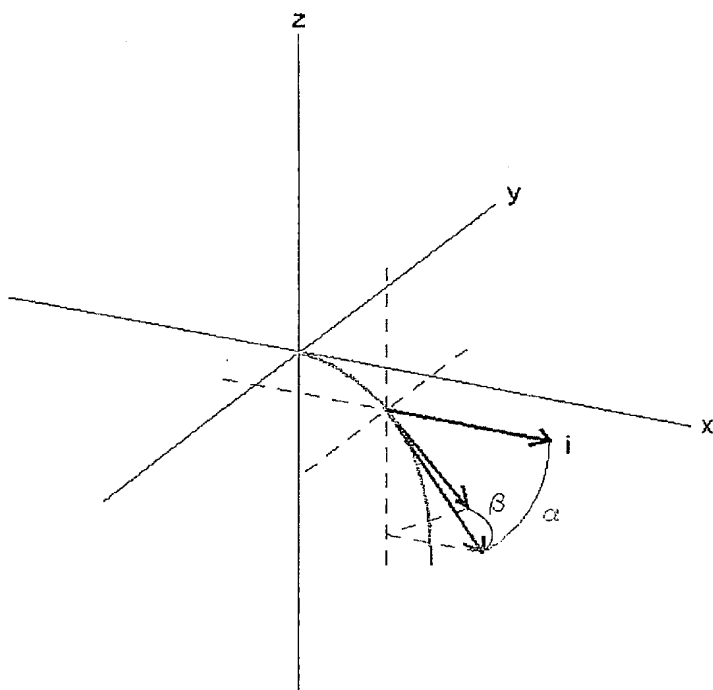
[図1]



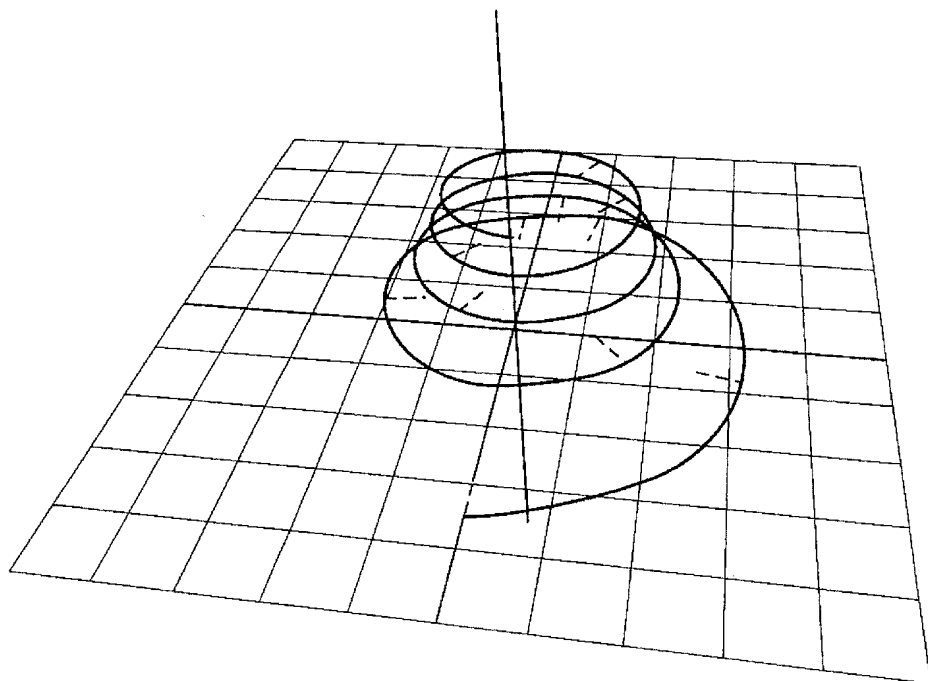
[図2]



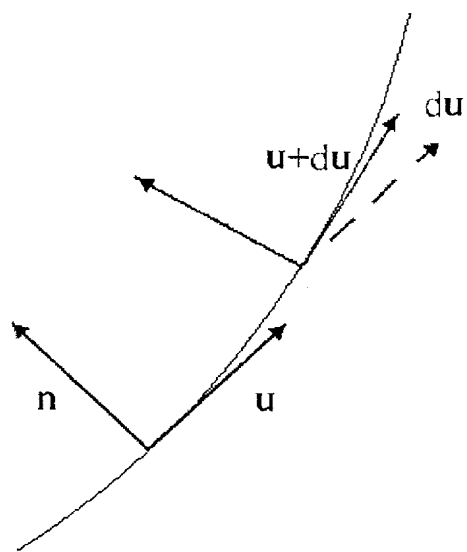
[図3]



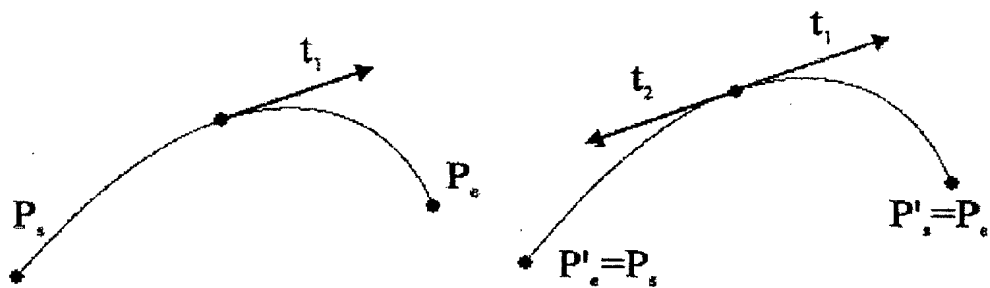
[図4]



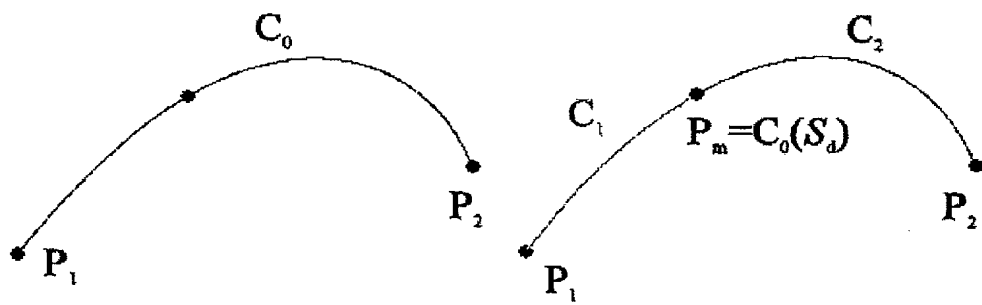
[図5]



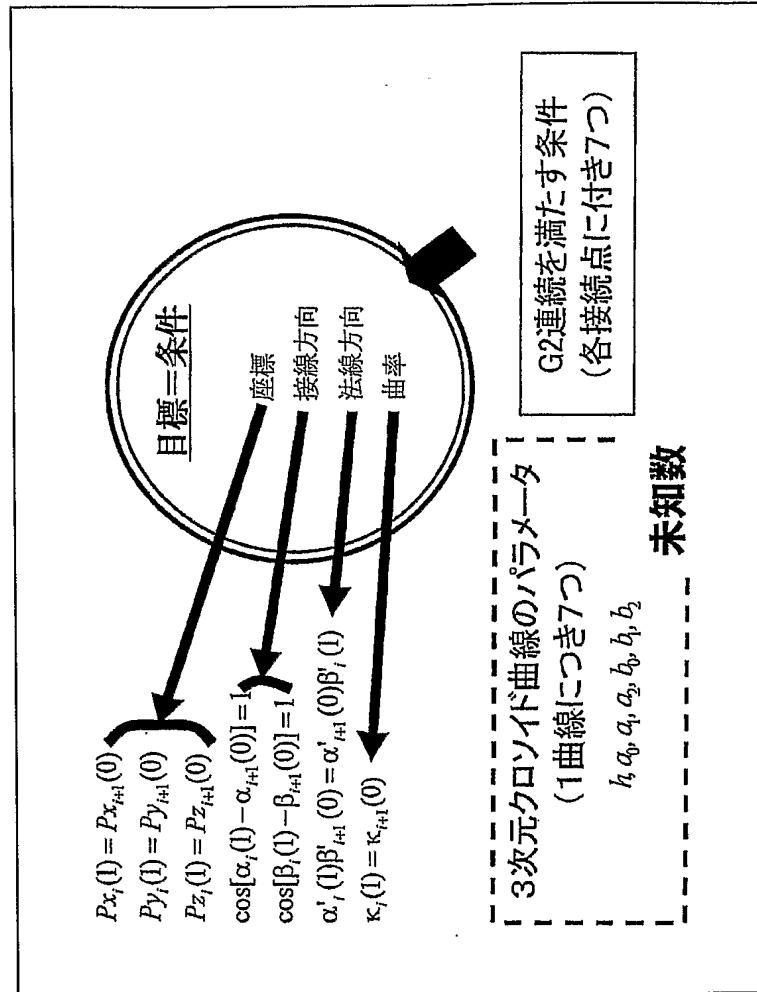
[図6]



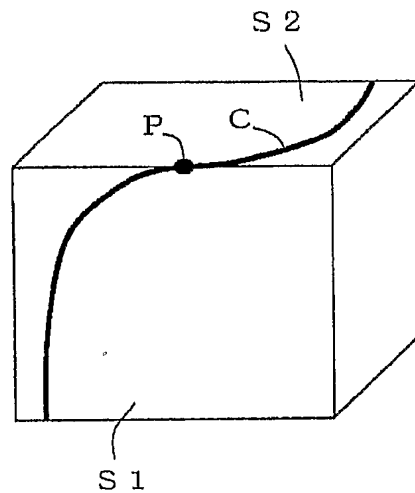
[図7]



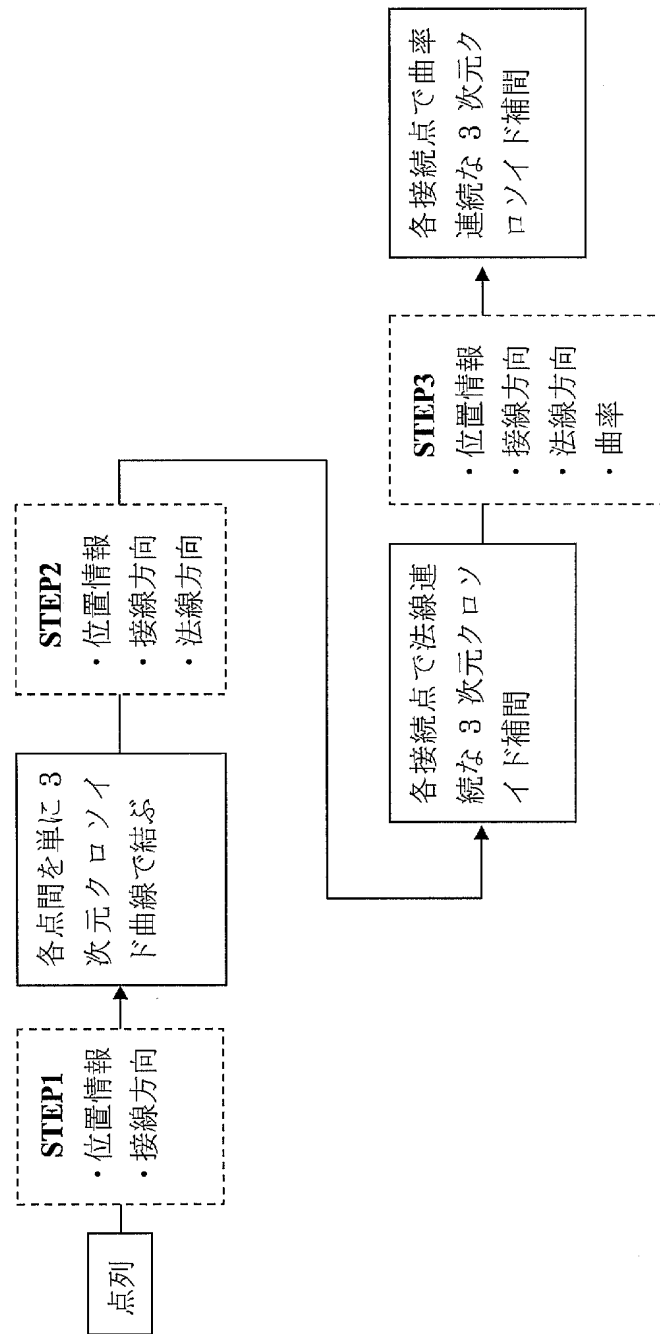
[図8]



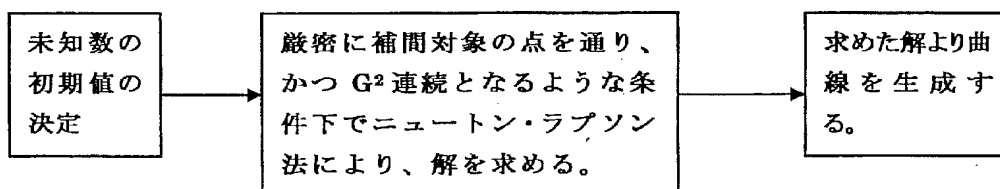
[図9]



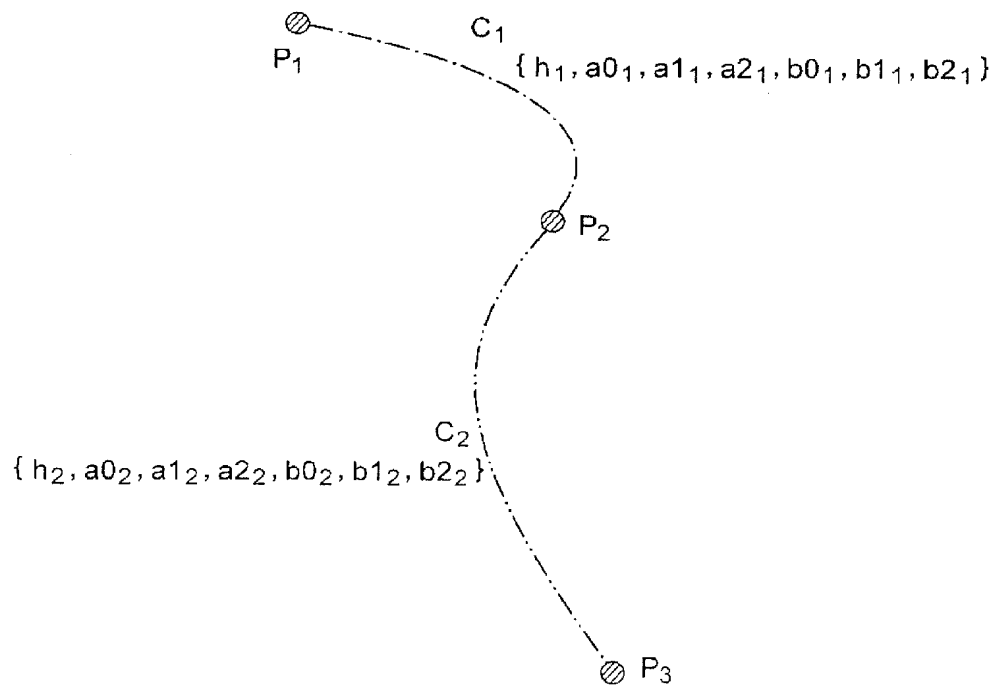
[図10]



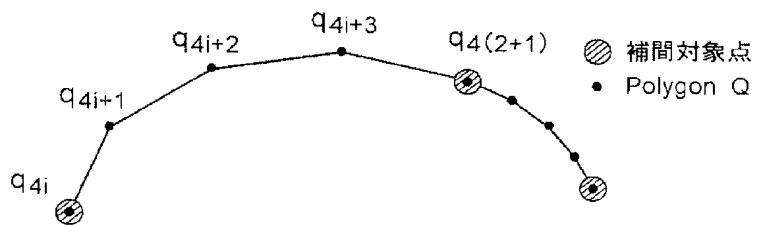
[図11]



[図12]

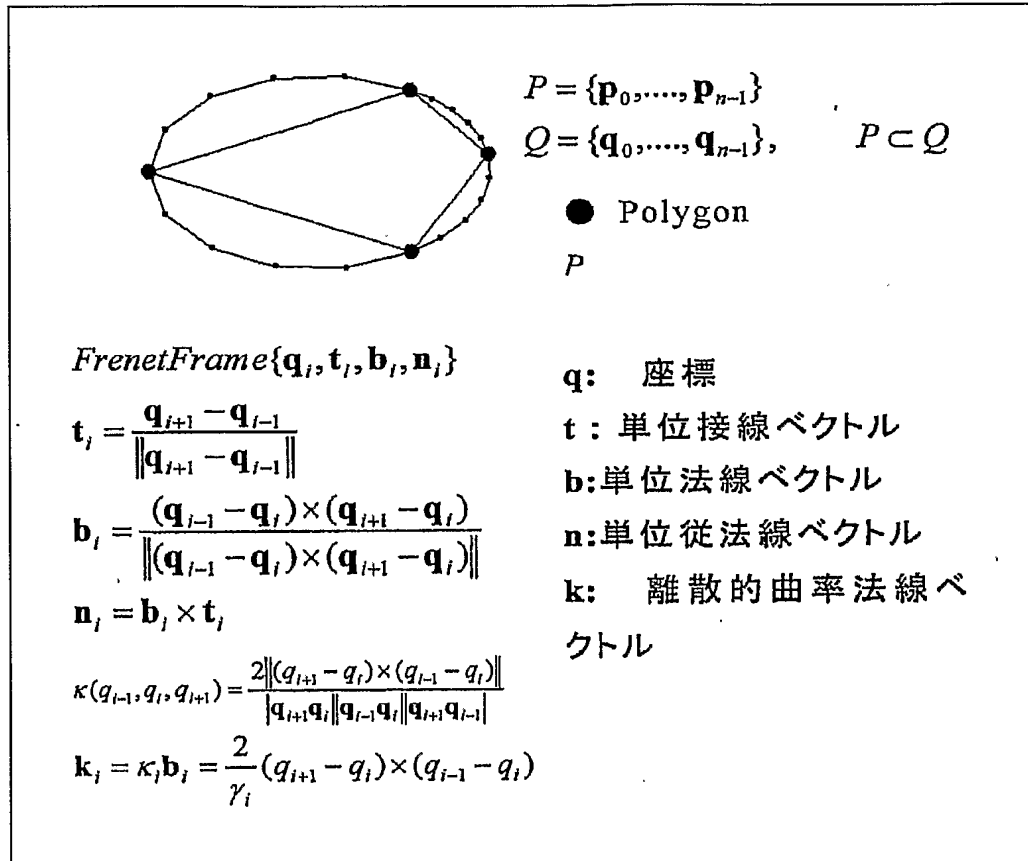


[図13]

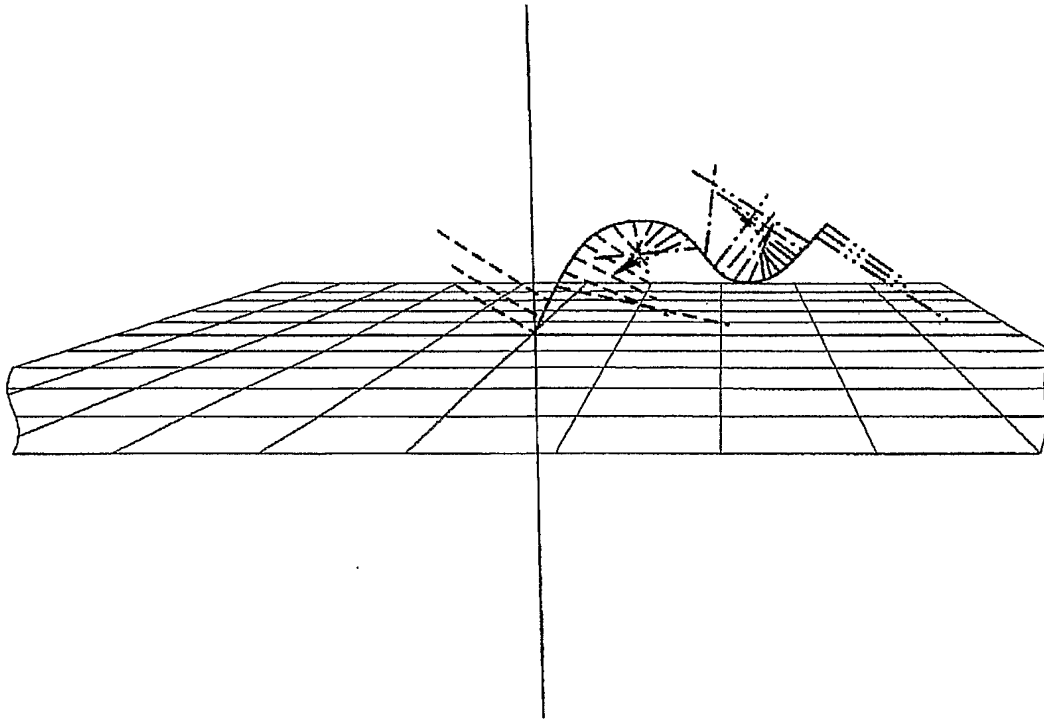




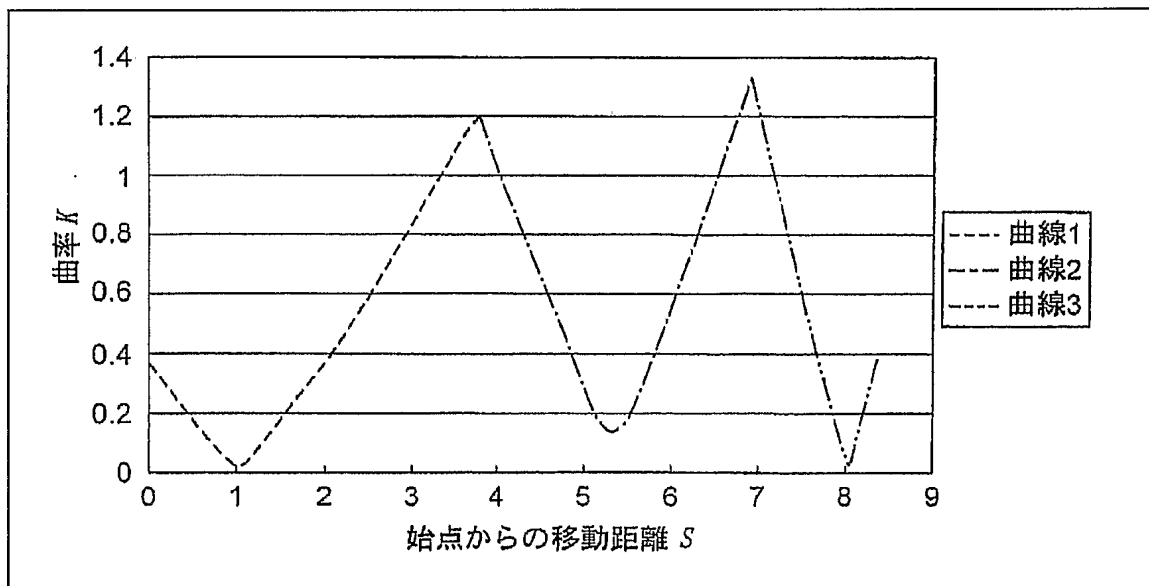
[図14]



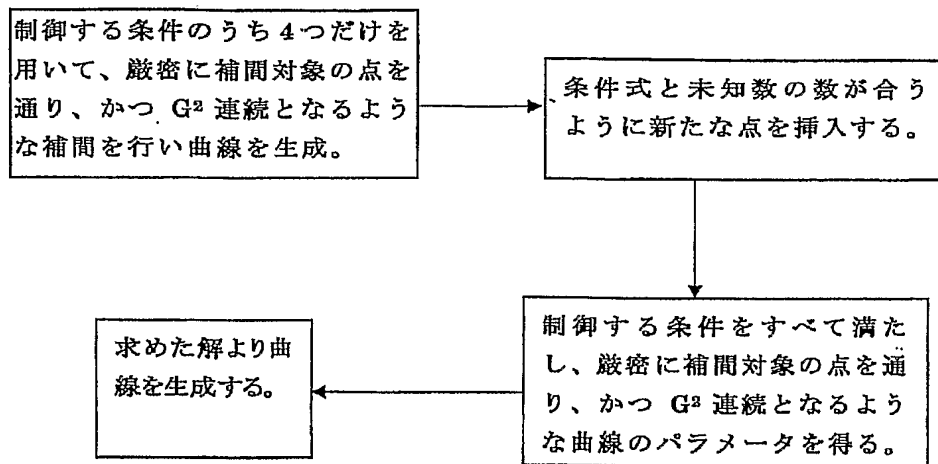
[図15]



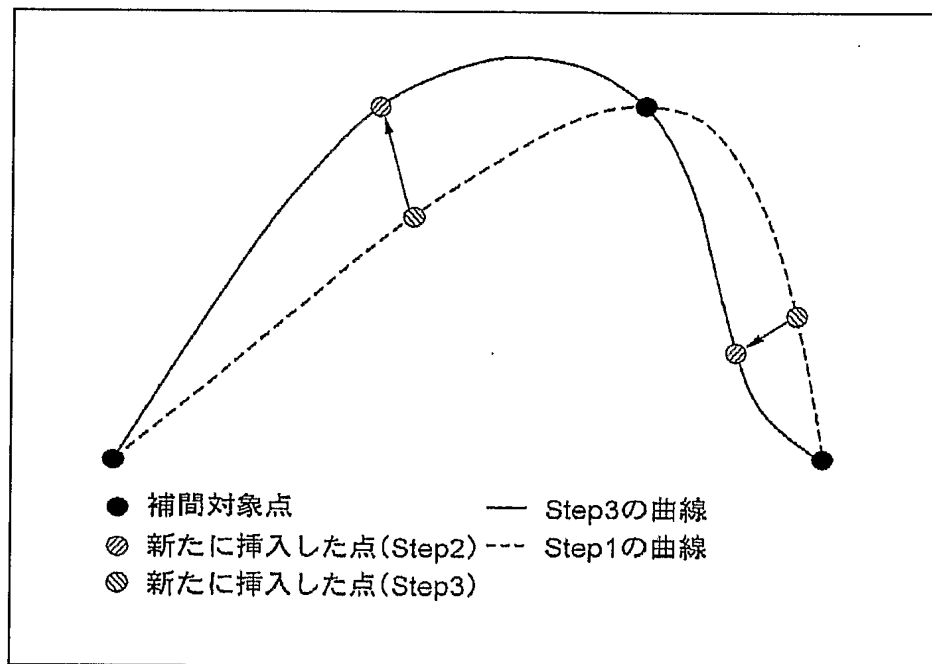
[図16]



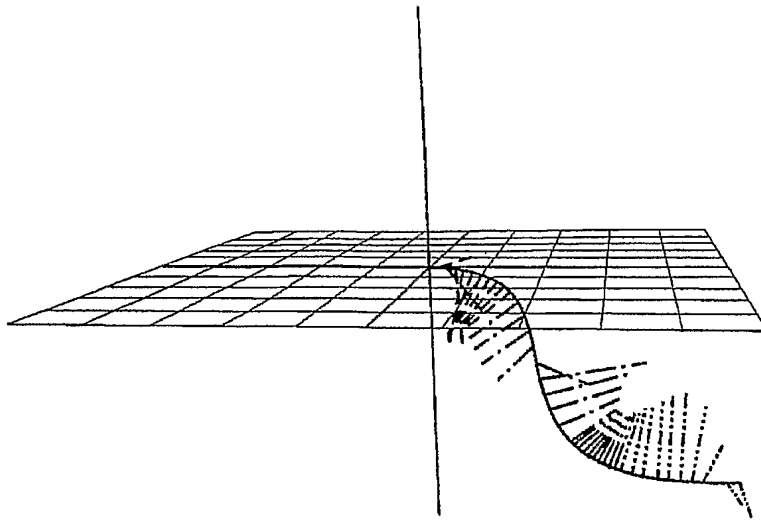
[図17]



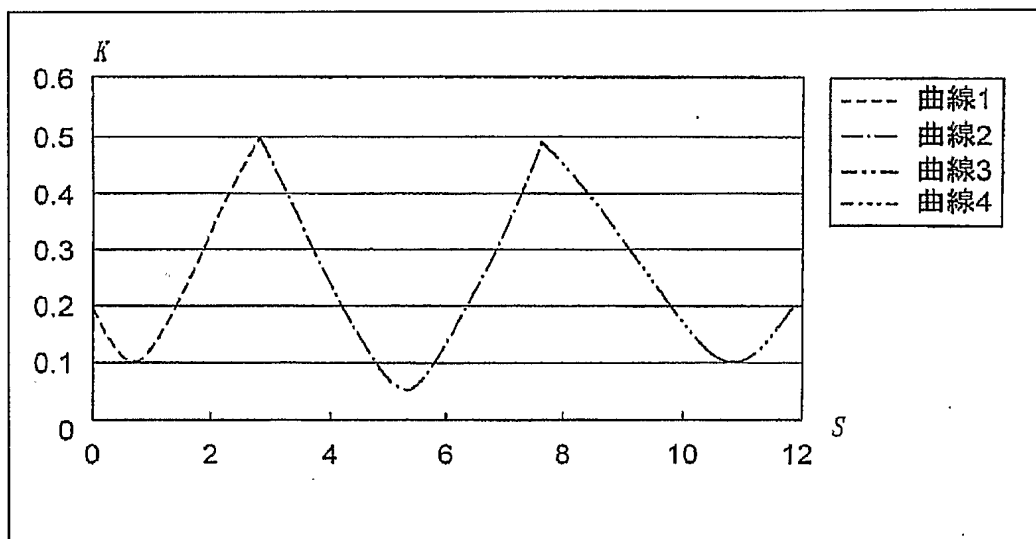
[図18]



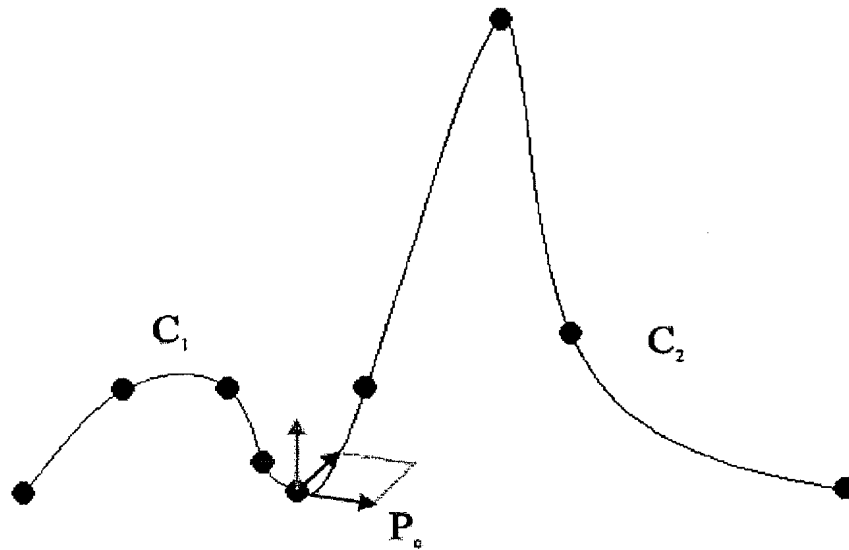
[図19]



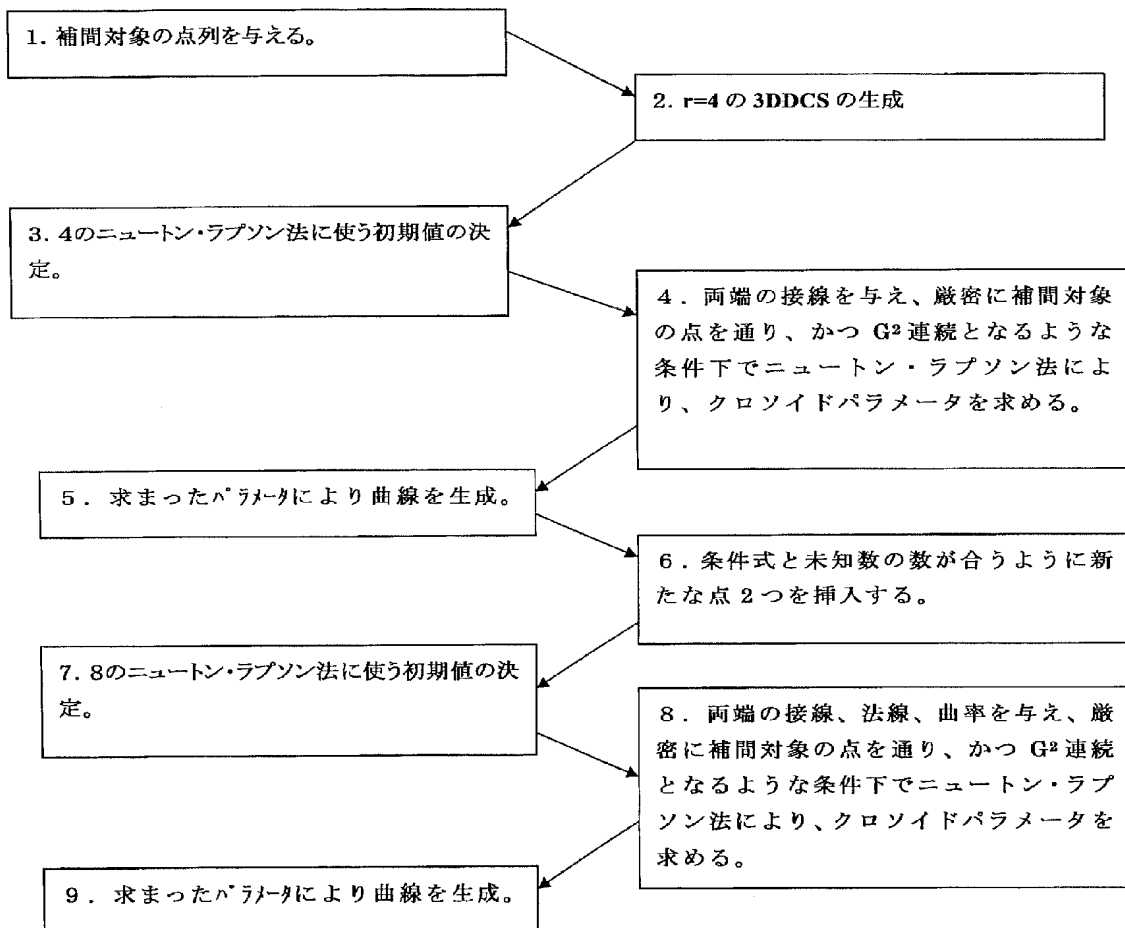
[図20]



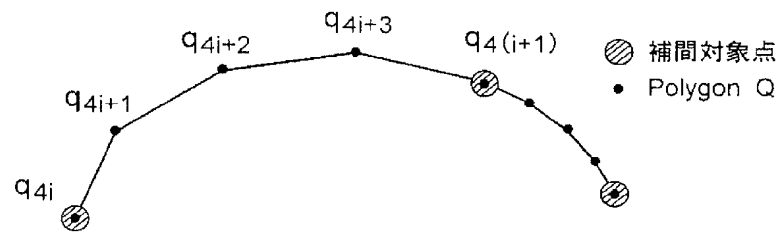
[図21]



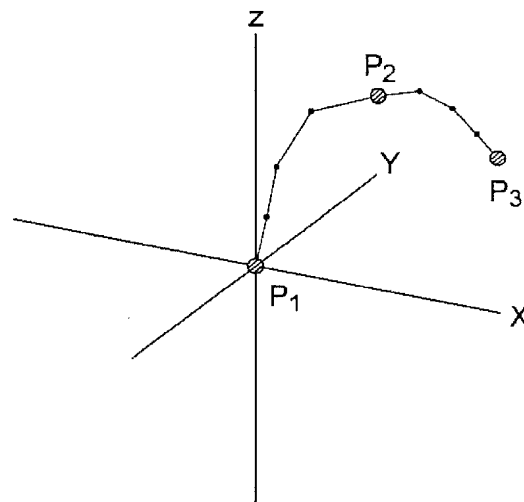
[図22]



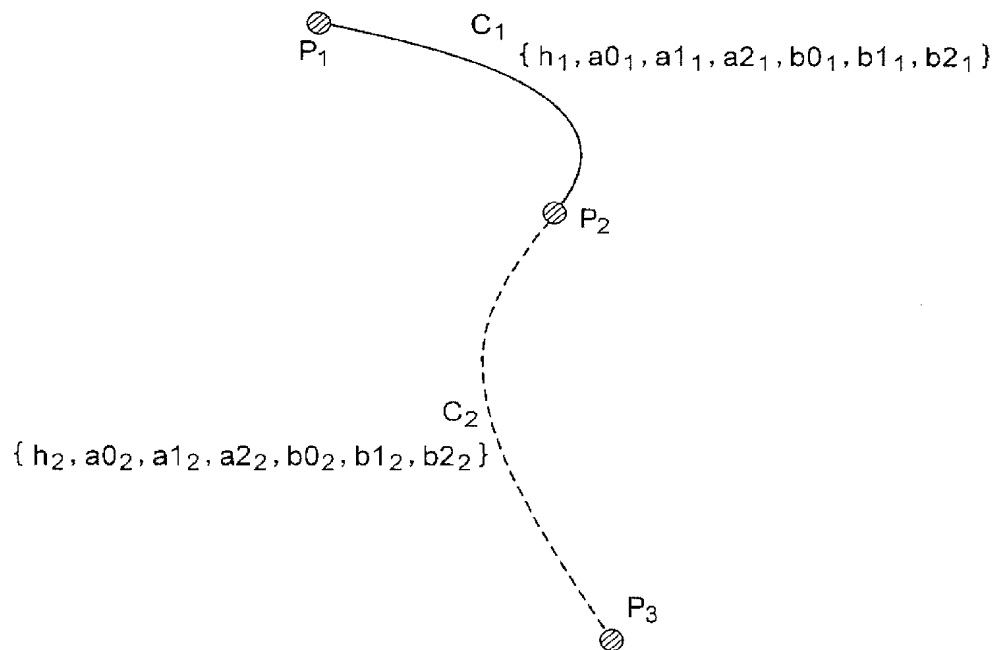
[図23]



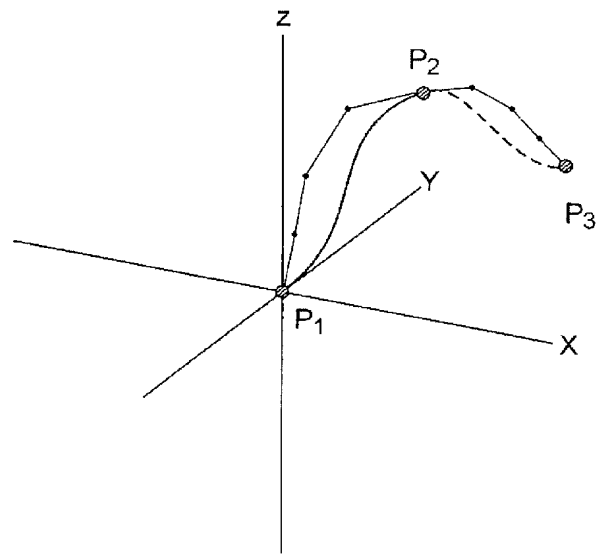
[図24]



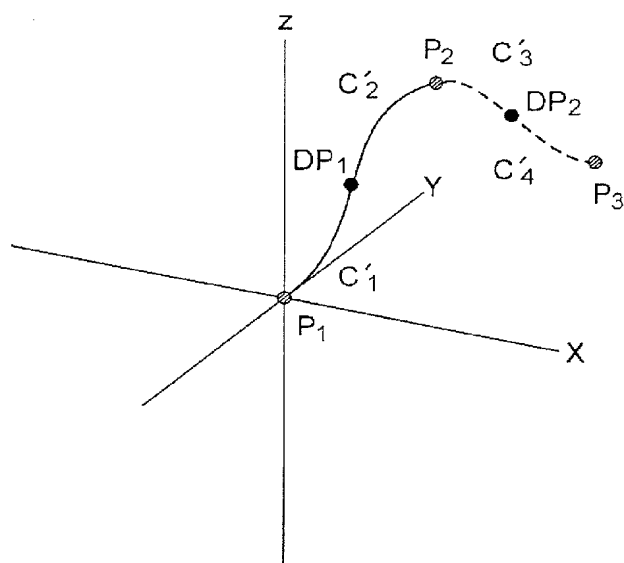
[図25]



[図26]



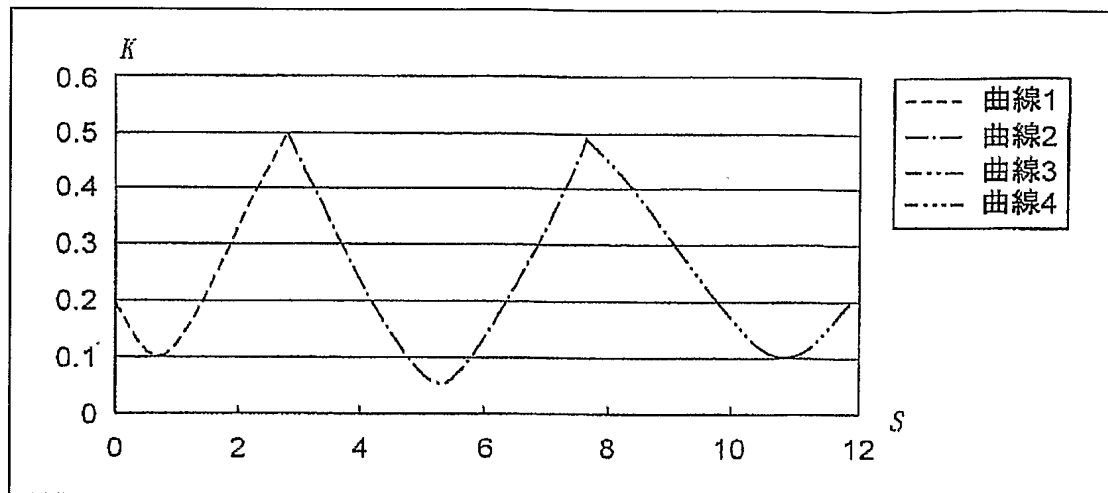
[図27]



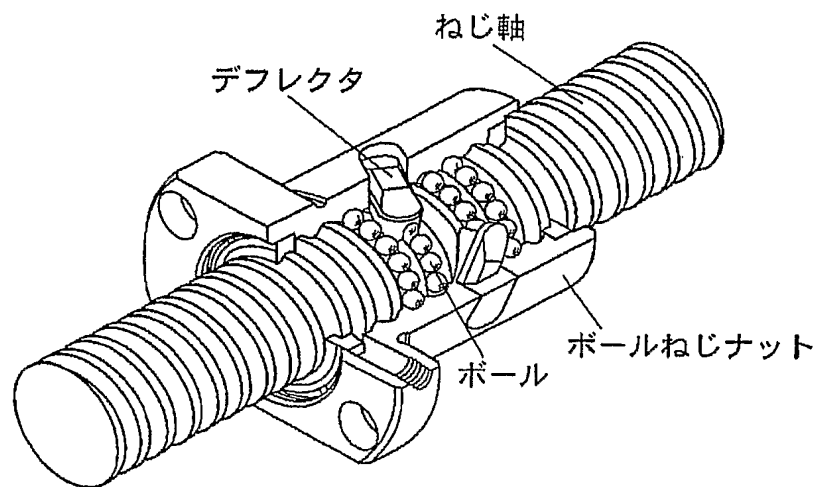




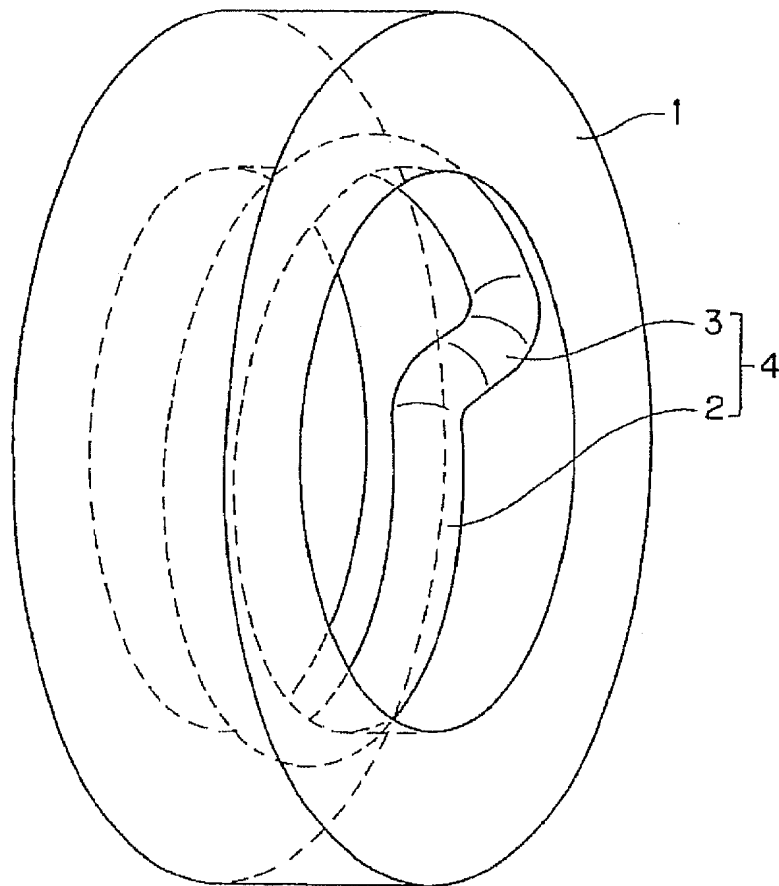
[図30]



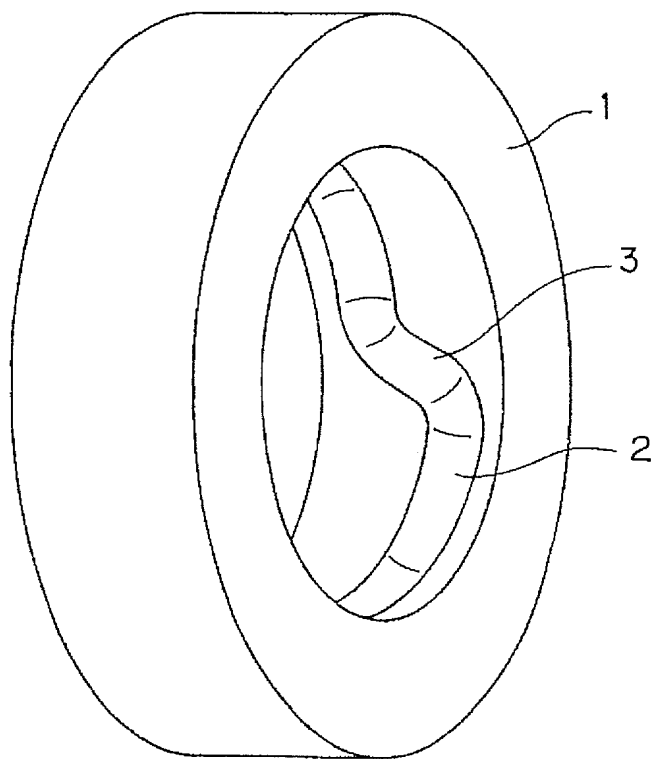
[図31]



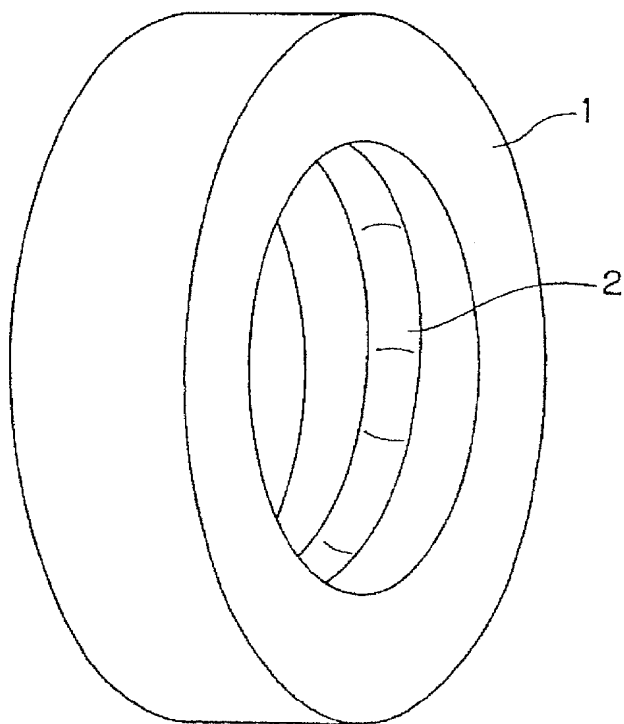
[図32]



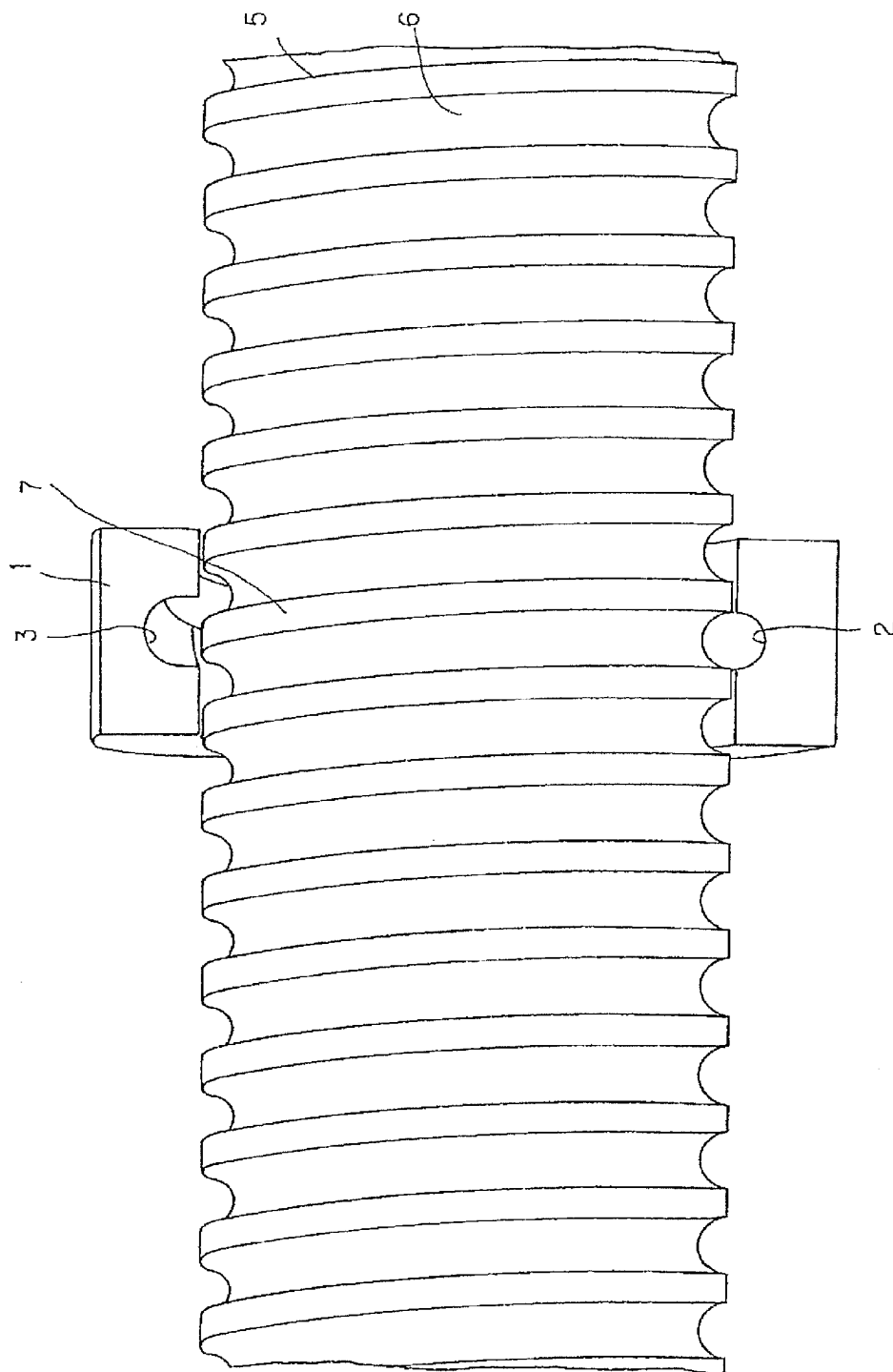
[図33A]



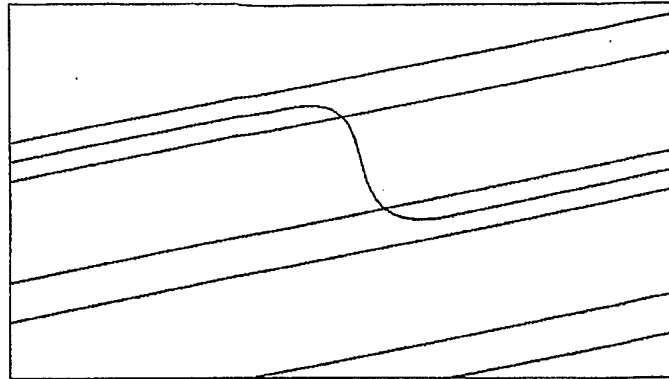
[図33B]



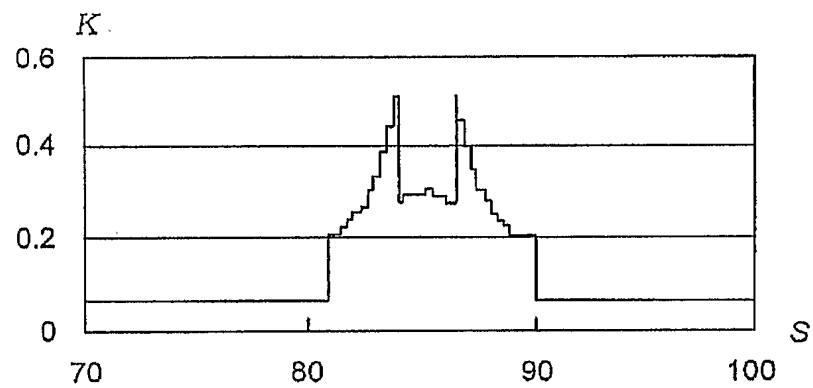
[図34]



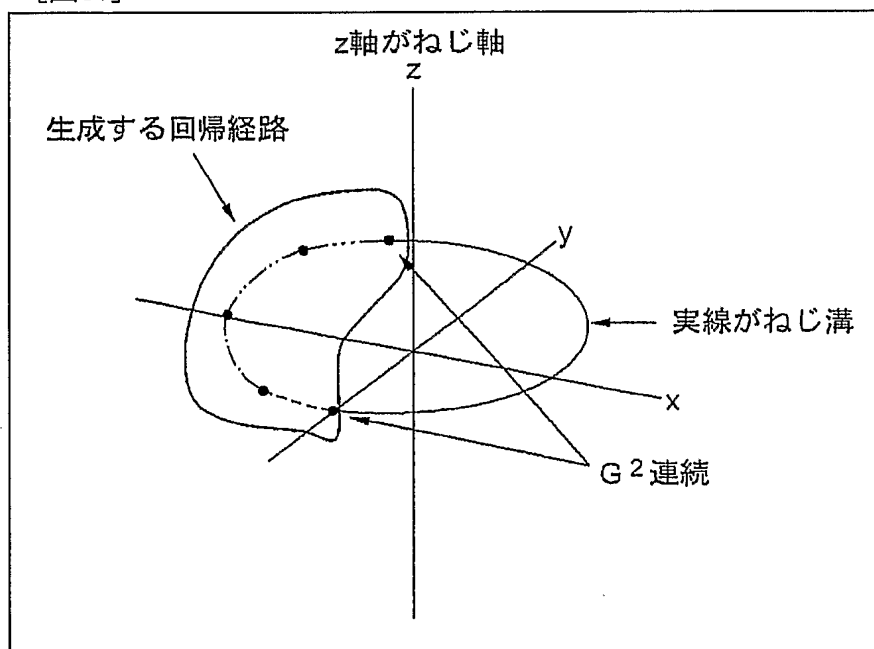
[図35]



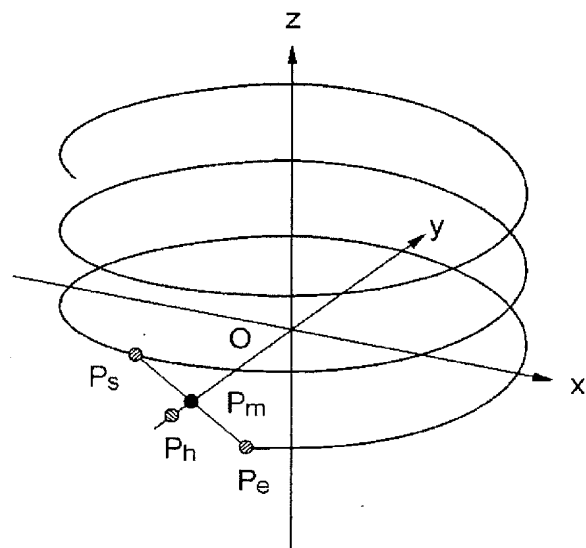
[図36]



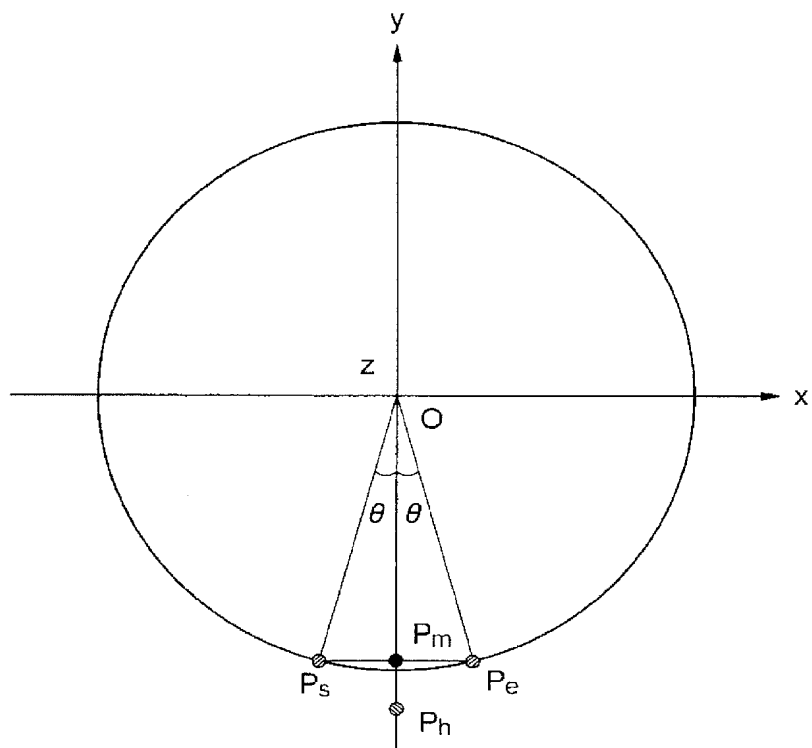
[図37]



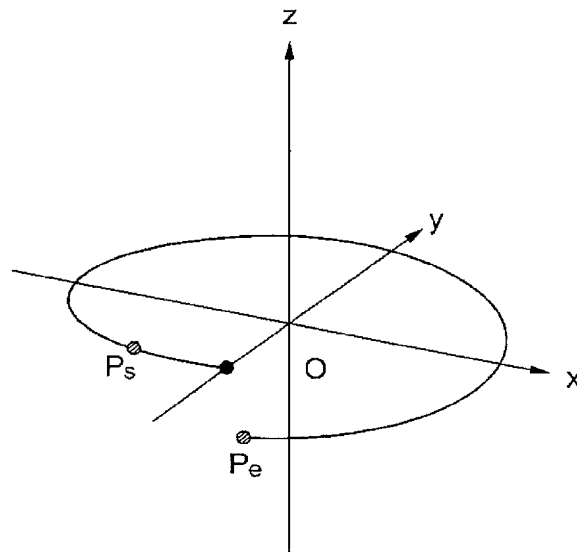
[図38]



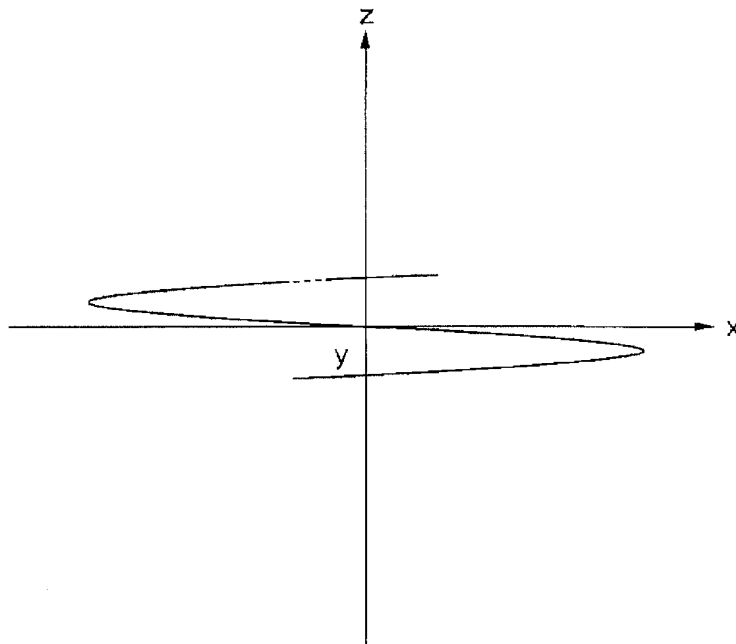
[図39]



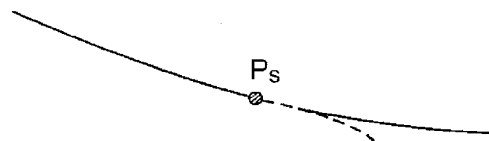
[図40]



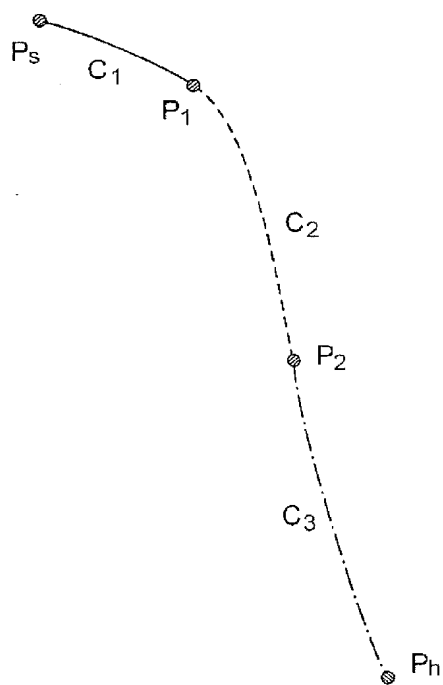
[図41]



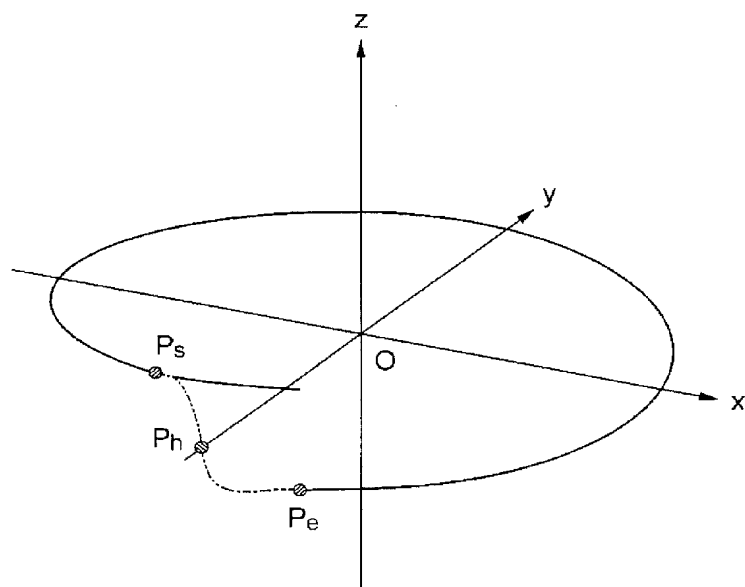
[図42]



[図43]

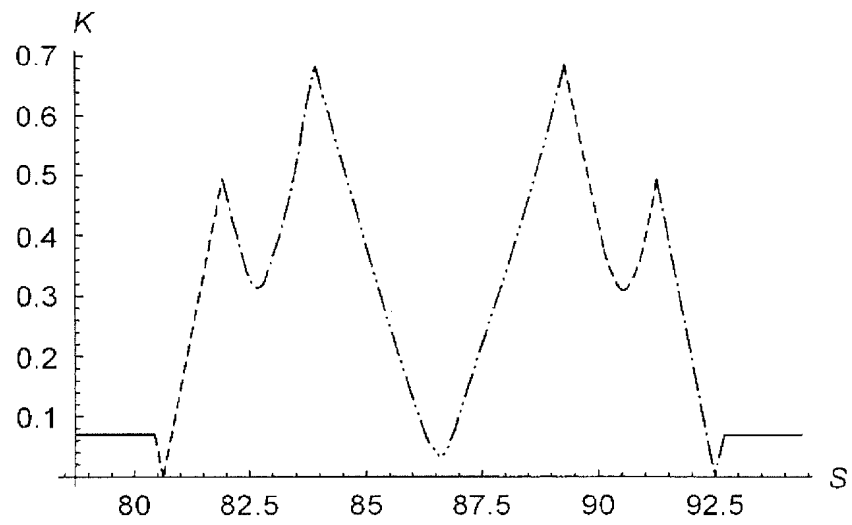


[図44]

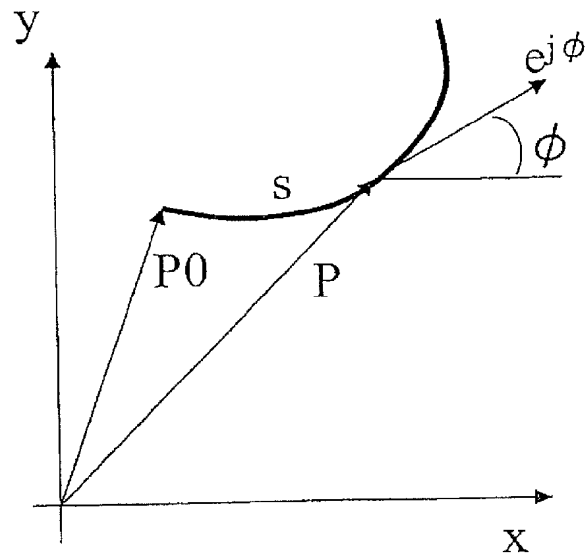




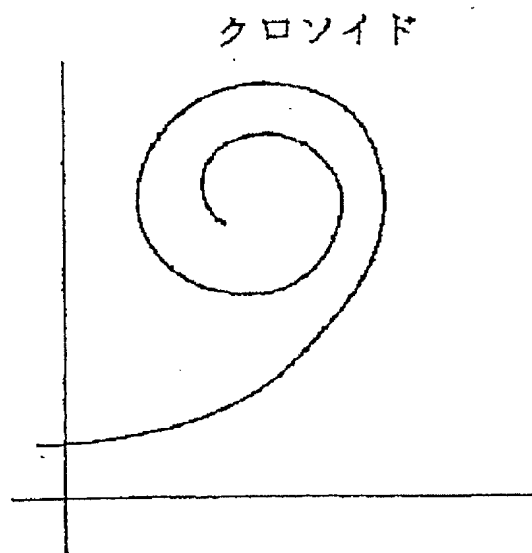
[図45]



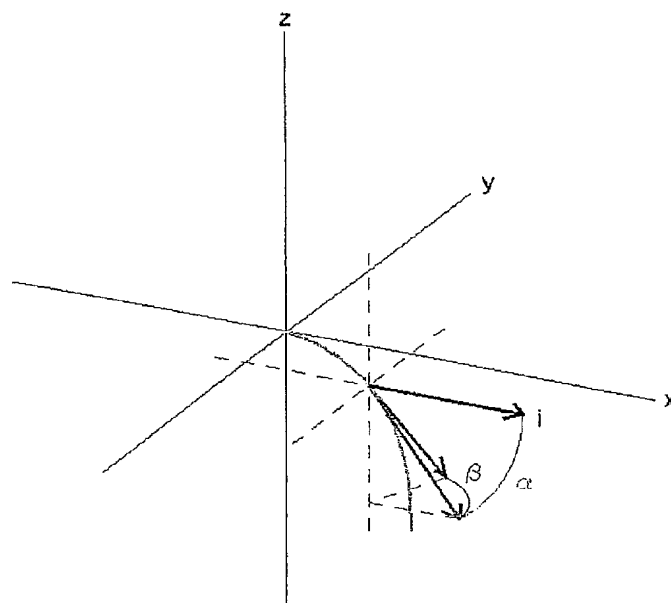
[図46]



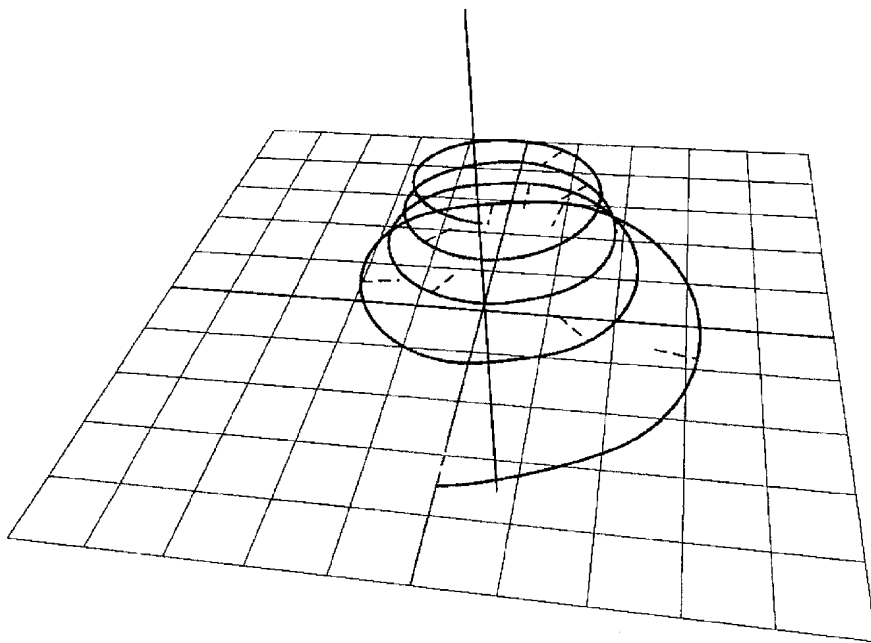
[図47]



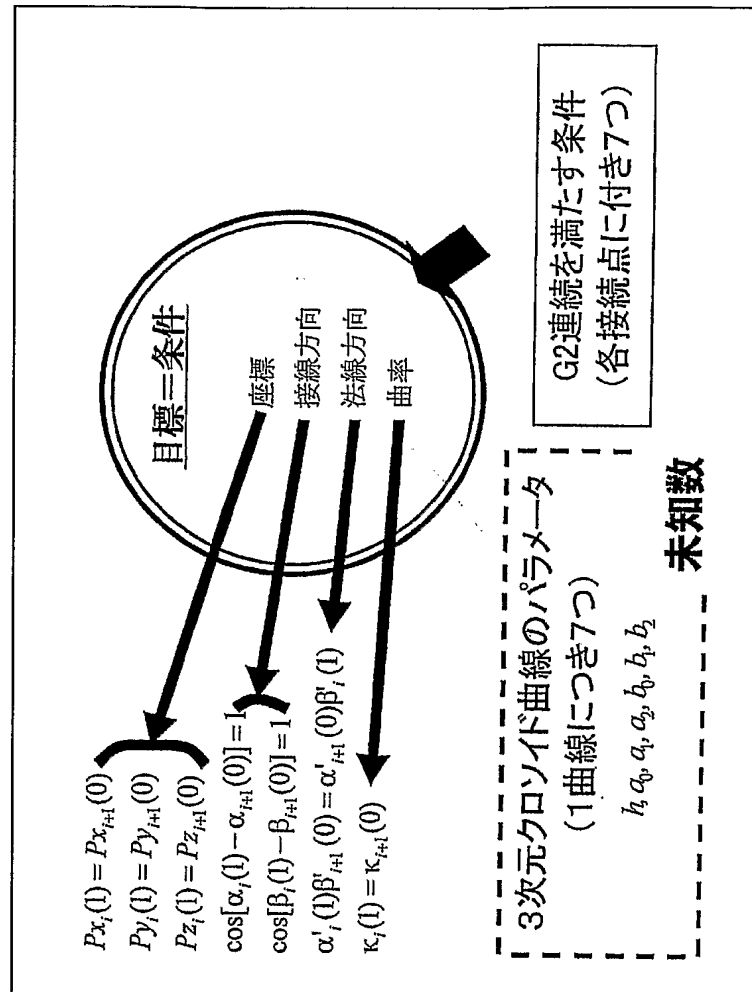
[図48]



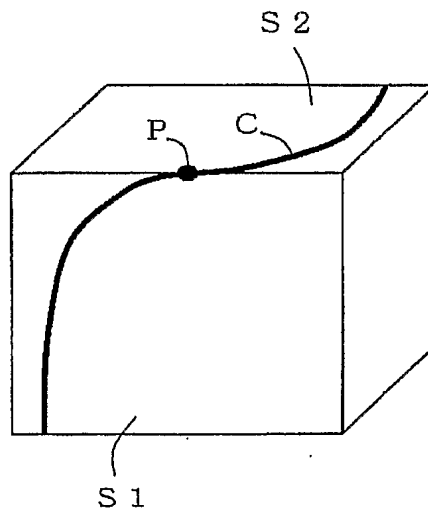
[図49]



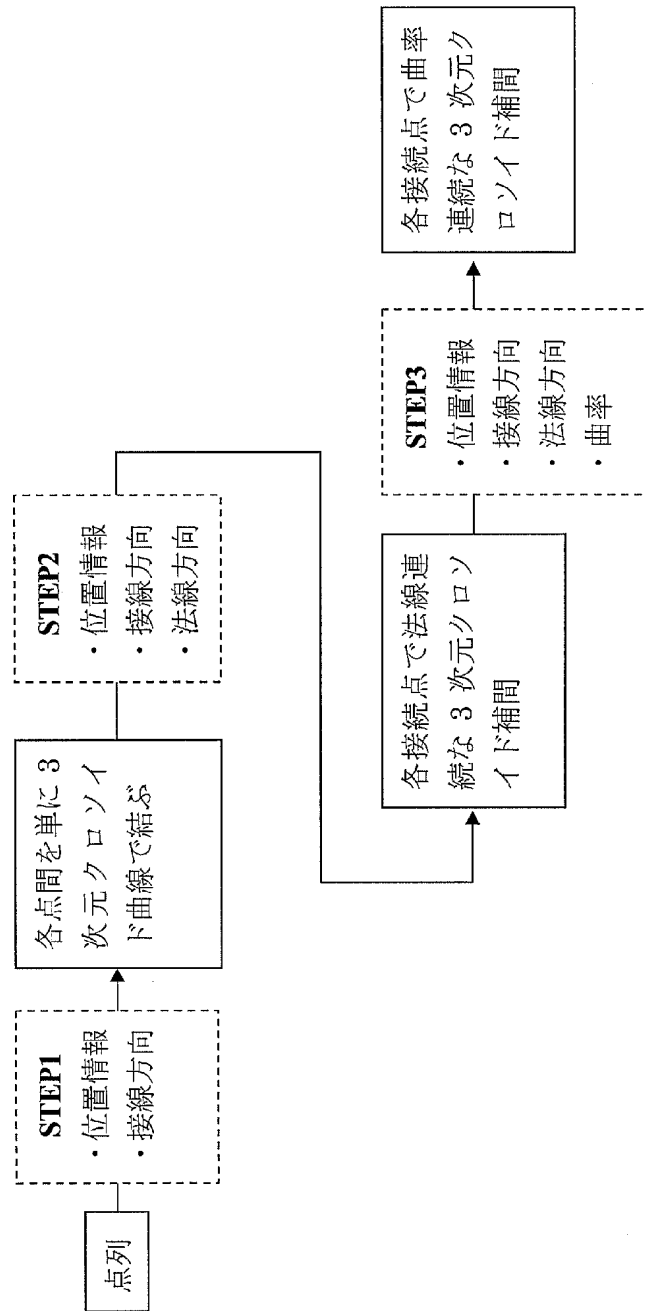
[図50]



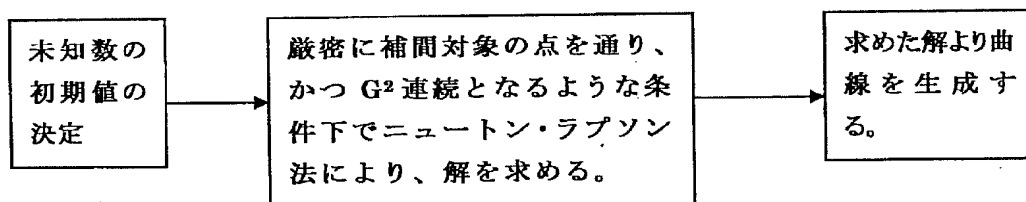
[図51]



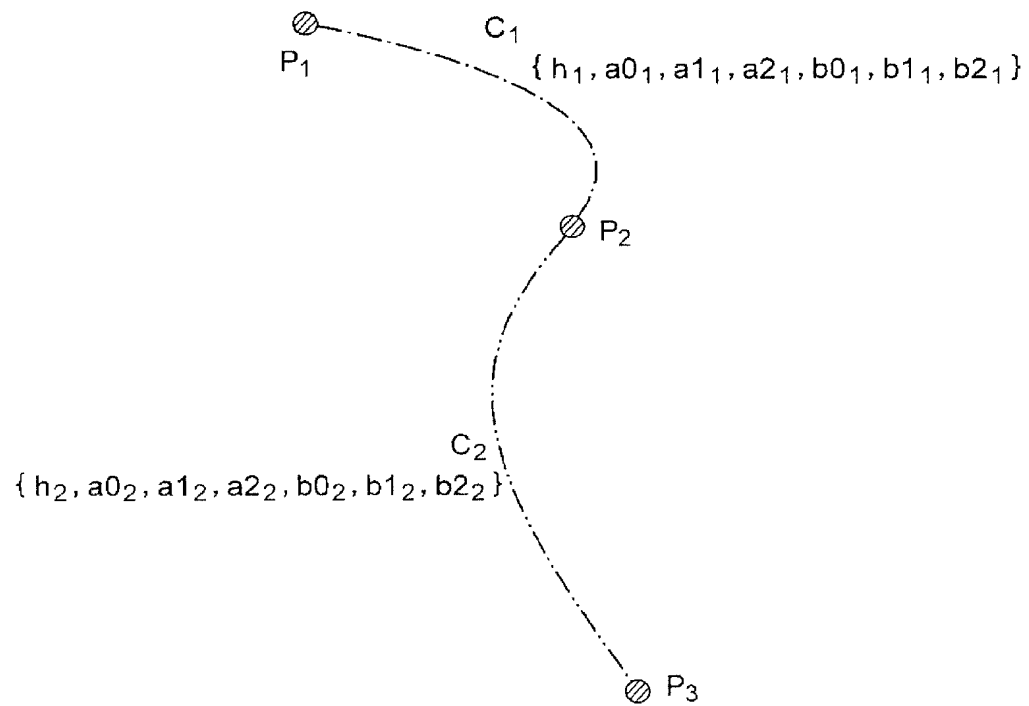
[図52]



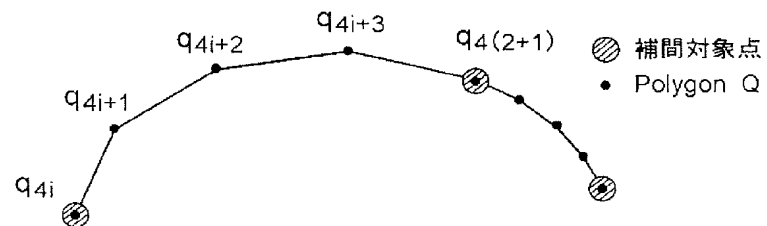
[図53]



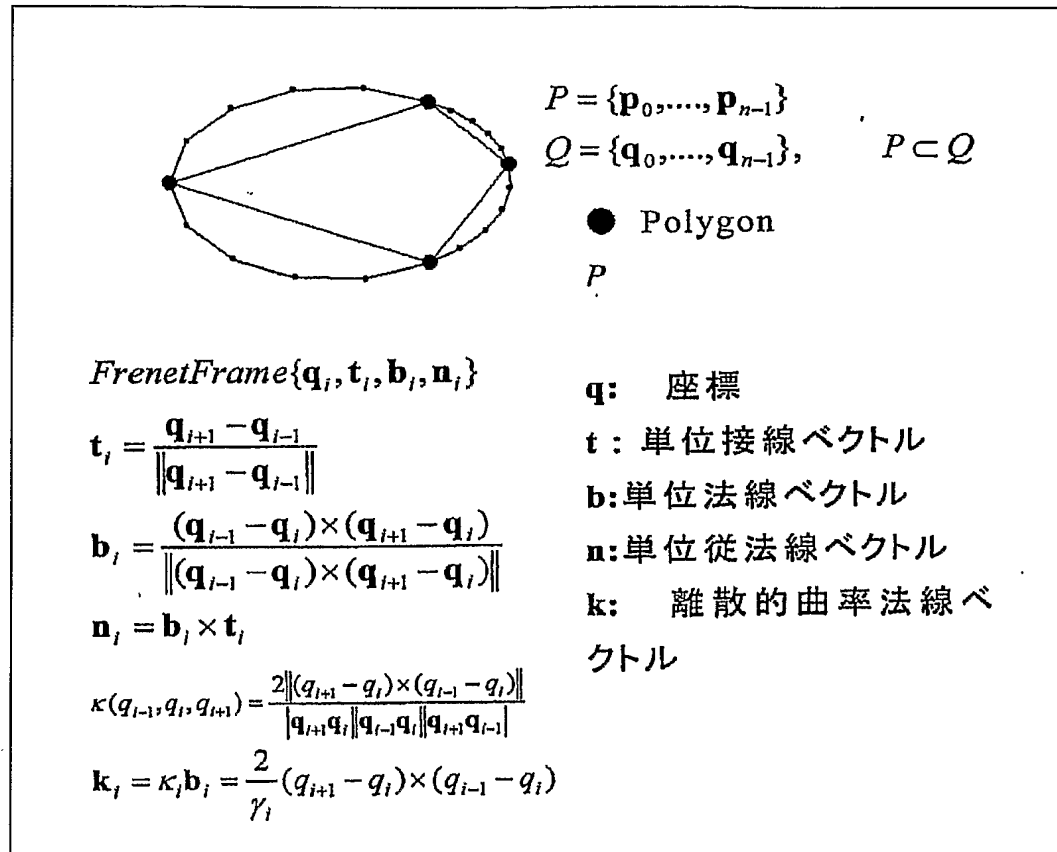
[図54]



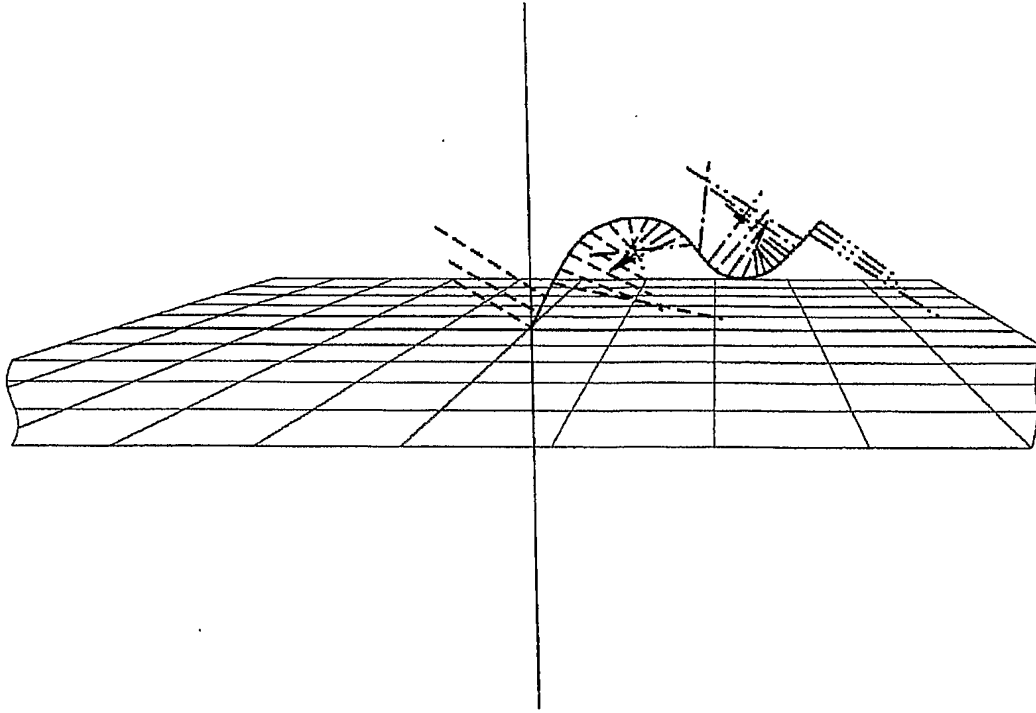
[図55]



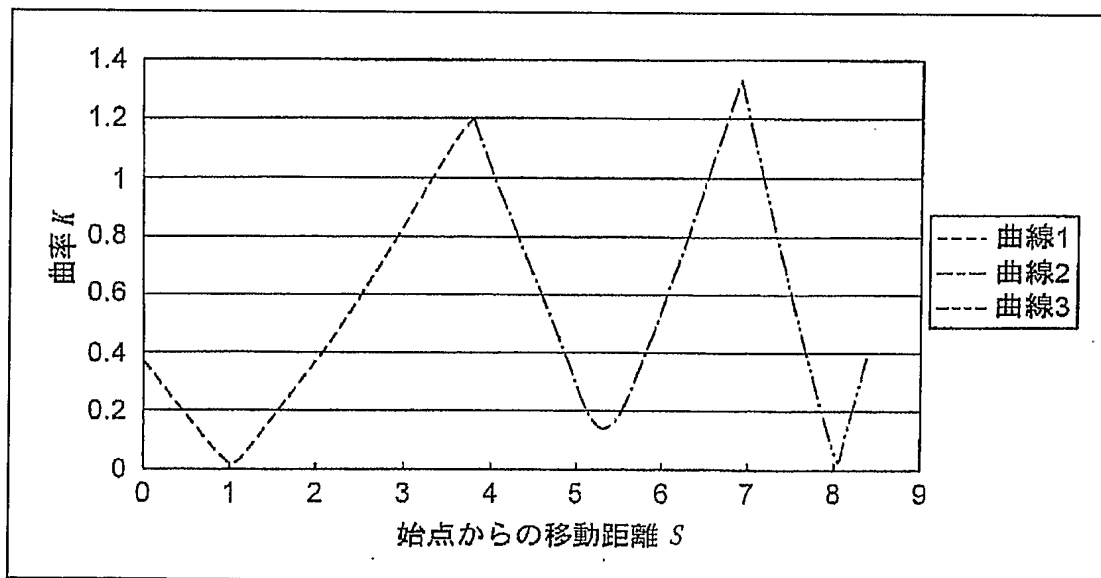
[図56]



[図57]

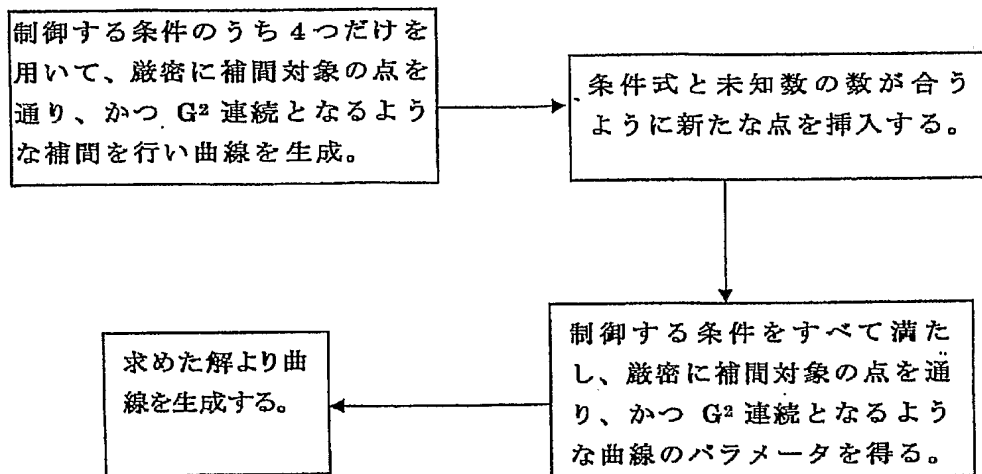


[図58]

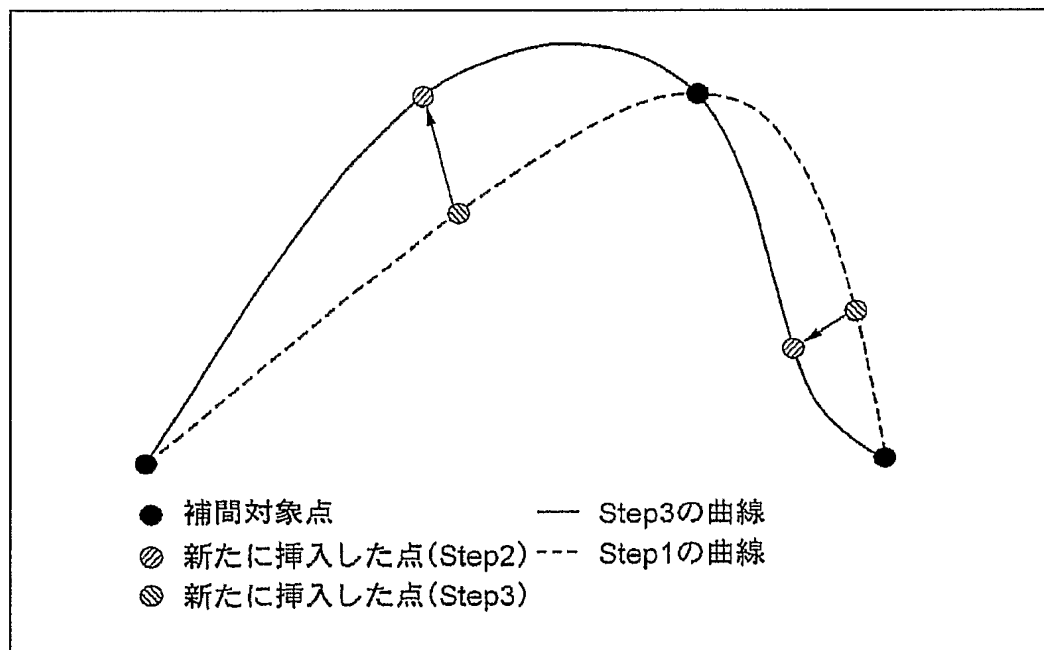




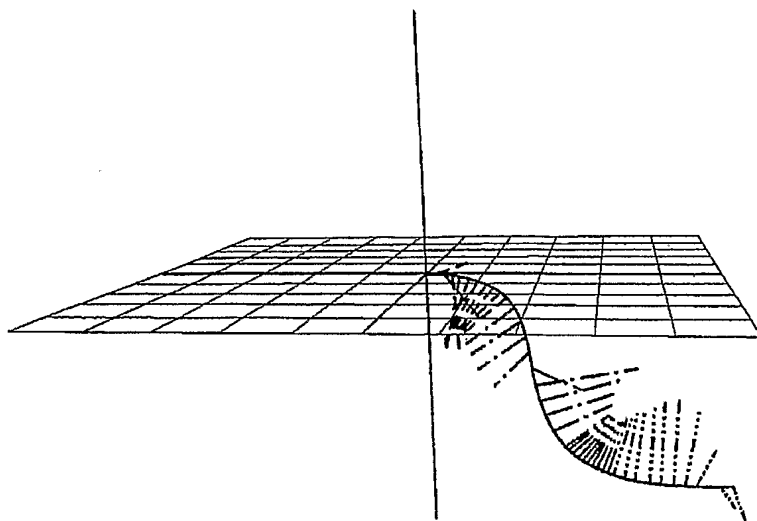
[図59]



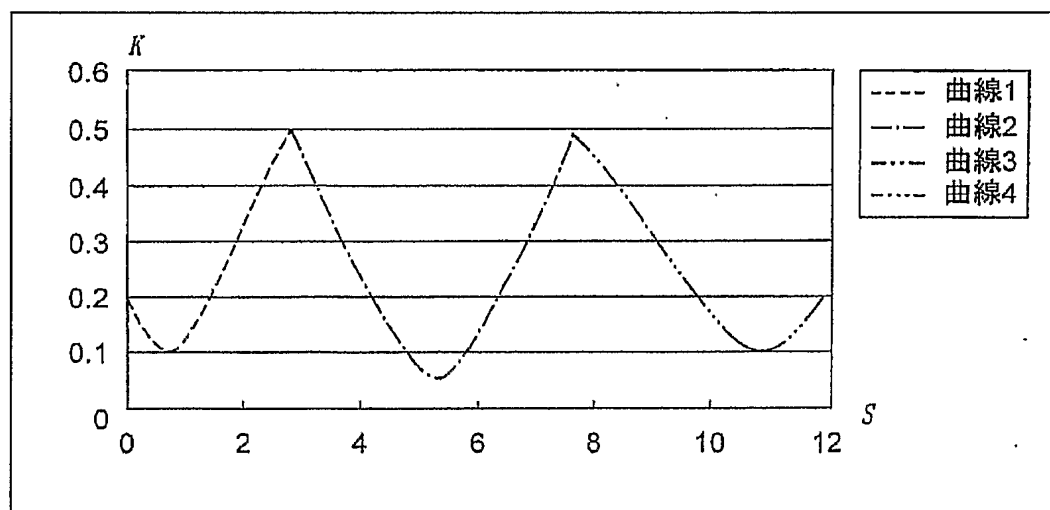
[図60]



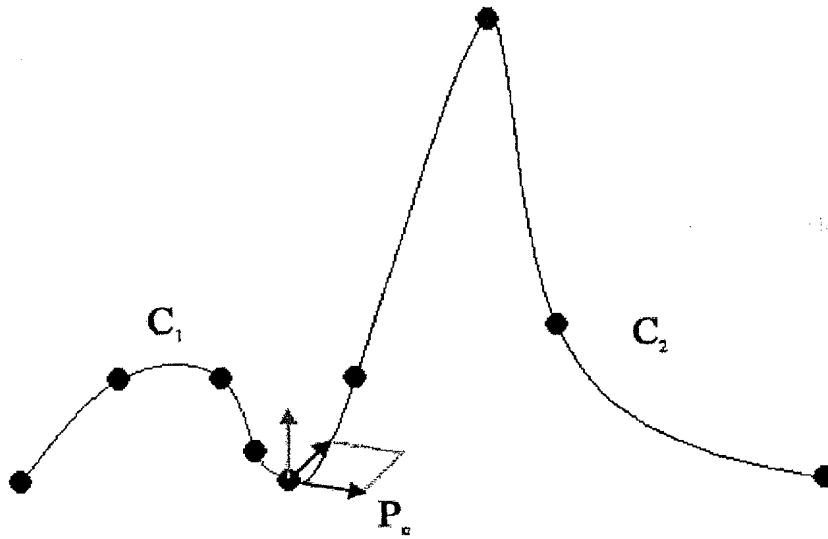
[図61]



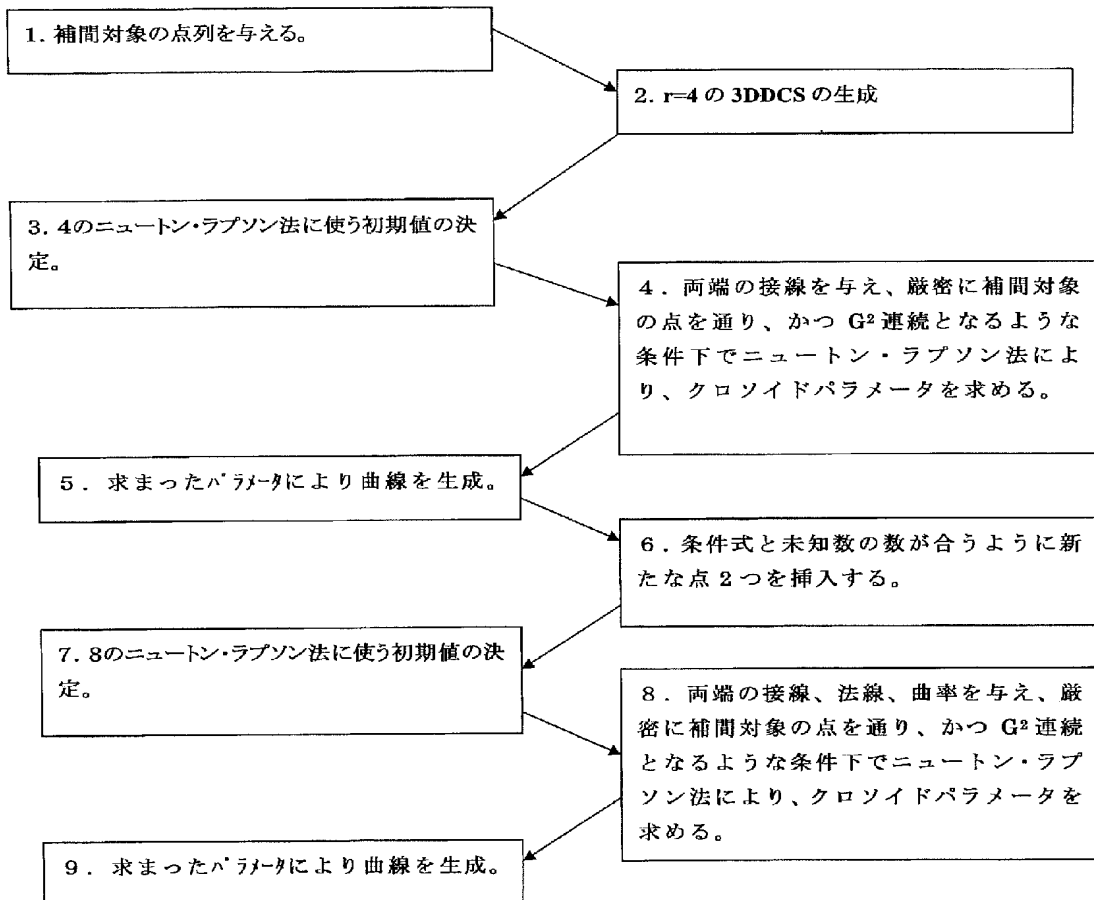
[図62]



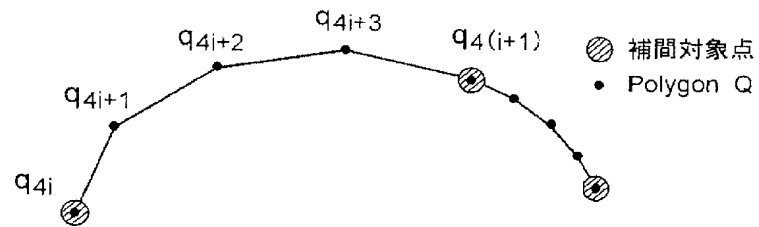
[図63]



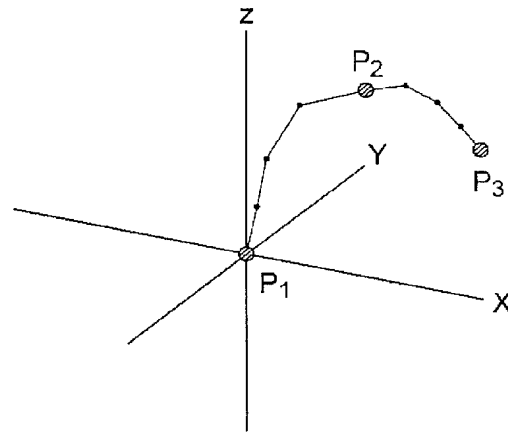
[図64]



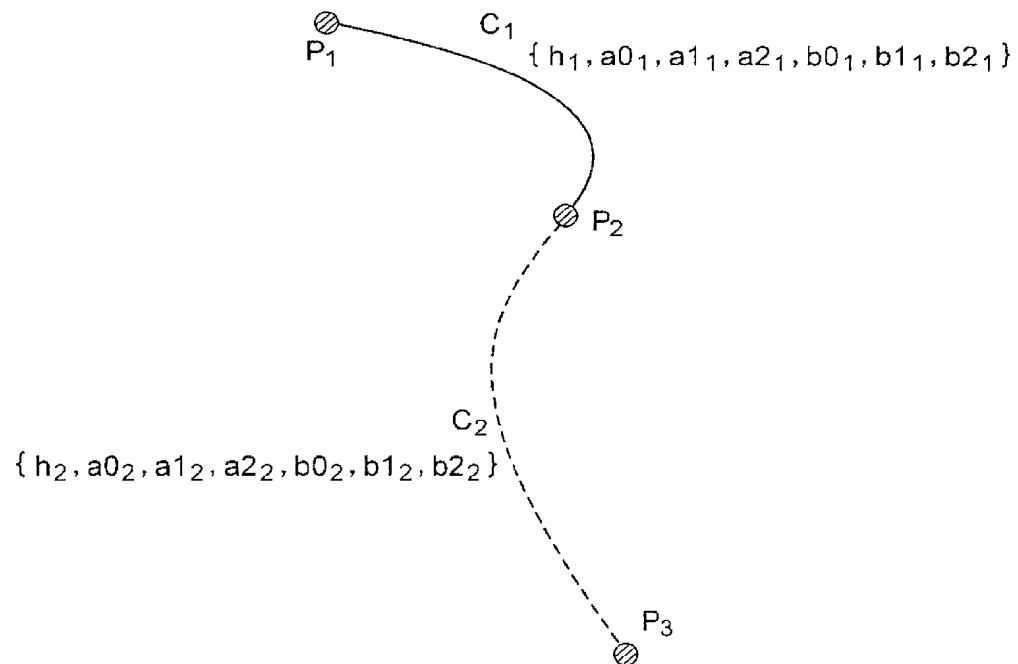
[図65]



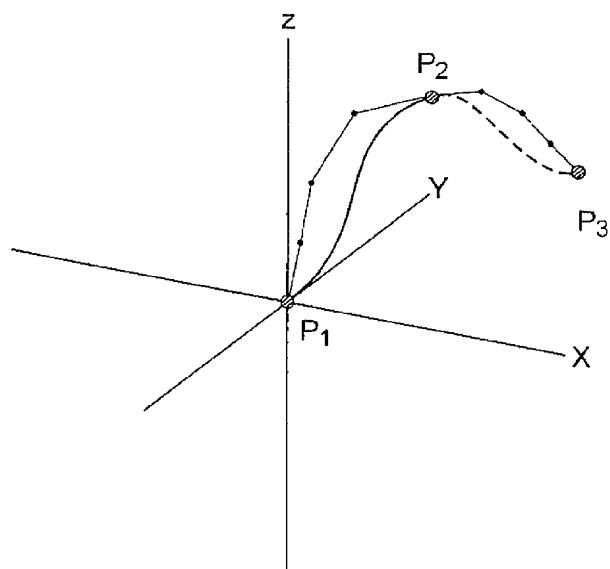
[図66]



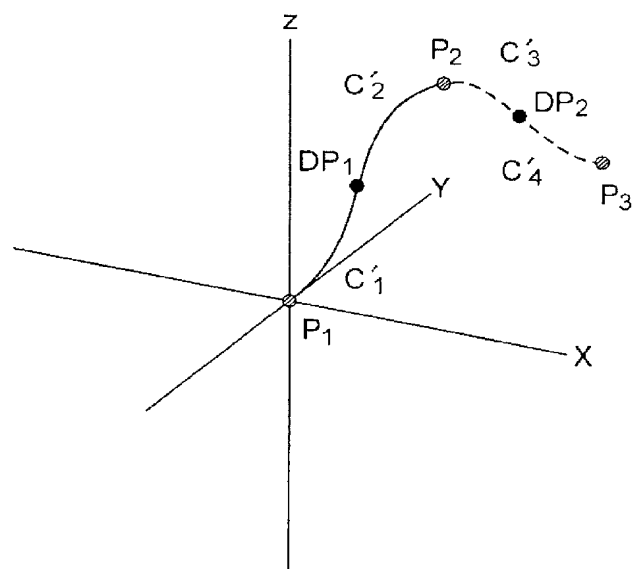
[図67]



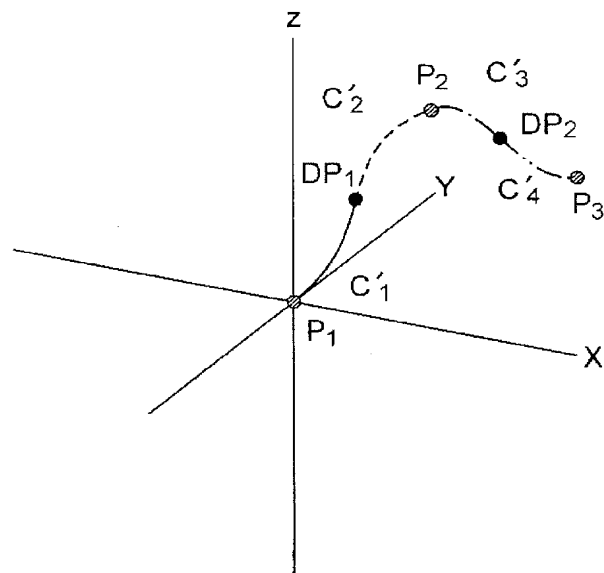
[図68]



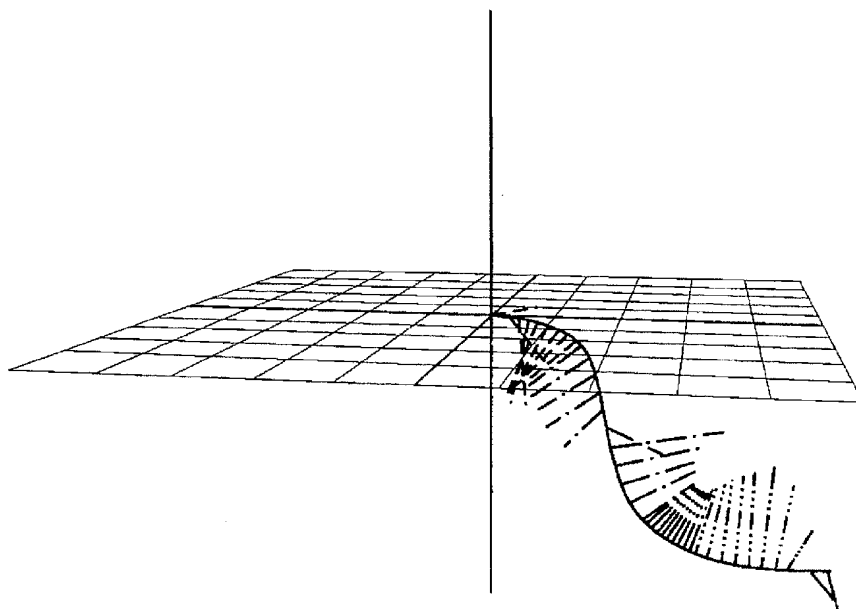
[図69]



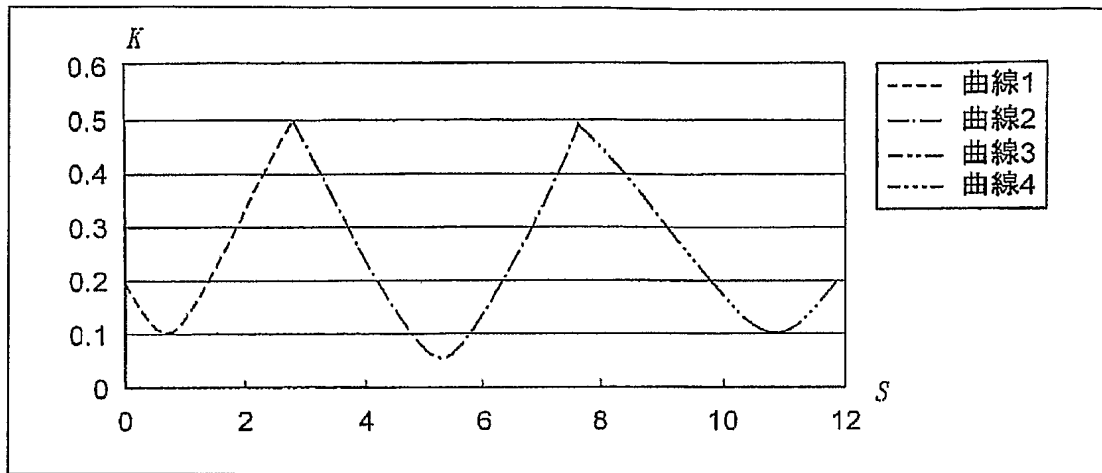
[図70]



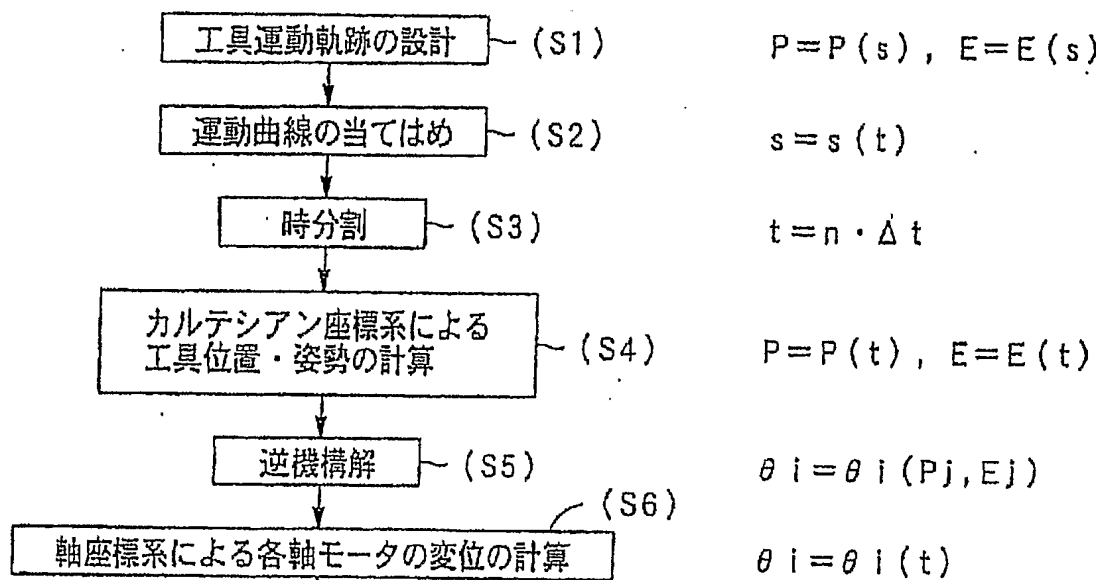
[図71]



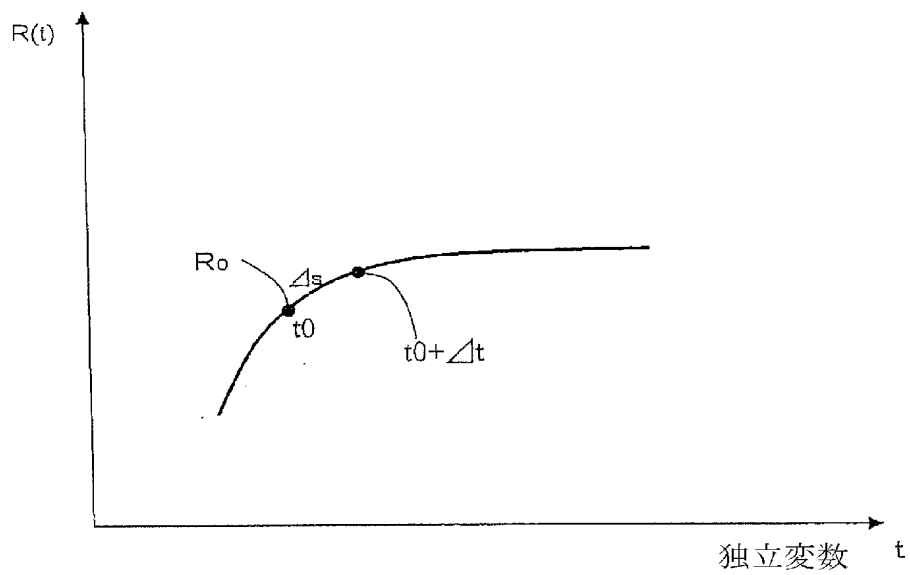
[図72]



[図73]



[図74]





# INTERNATIONAL SEARCH REPORT

International application No.

PCT/JP2005/002132

## A. CLASSIFICATION OF SUBJECT MATTER

Int.Cl.<sup>7</sup> G05B19/4103

According to International Patent Classification (IPC) or to both national classification and IPC

## B. FIELDS SEARCHED

Minimum documentation searched (classification system followed by classification symbols)

Int.Cl.<sup>7</sup> G05B19/18-19/46

Documentation searched other than minimum documentation to the extent that such documents are included in the fields searched

Jitsuyo Shinan Koho	1922-1996	Jitsuyo Shinan Toroku Koho	1996-2005
Kokai Jitsuyo Shinan Koho	1971-2005	Toroku Jitsuyo Shinan Koho	1994-2005

Electronic data base consulted during the international search (name of data base and, where practicable, search terms used)

## C. DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT

Category*	Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages	Relevant to claim No.
X	Kenjiro MIURA, "Tan'i 4-gensu Sekibun Kyokusen", Transactions of Information Processing Society of Japan, 1997, Vol.38, No.11, pages 2227 to 2236	1-27
X	Shigure GU, "Clothoid ni yoru Jiyu Kyokusen Hokanho", Journal of the Robotics Society of Japan, 1990, Vol.8, No.6, pages 40 to 47	1-27



Further documents are listed in the continuation of Box C.



See patent family annex.

\* Special categories of cited documents:

"A" document defining the general state of the art which is not considered to be of particular relevance

"E" earlier application or patent but published on or after the international filing date

"L" document which may throw doubts on priority claim(s) or which is cited to establish the publication date of another citation or other special reason (as specified)

"O" document referring to an oral disclosure, use, exhibition or other means

"P" document published prior to the international filing date but later than the priority date claimed

"T" later document published after the international filing date or priority date and not in conflict with the application but cited to understand the principle or theory underlying the invention

"X" document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered novel or cannot be considered to involve an inventive step when the document is taken alone

"Y" document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered to involve an inventive step when the document is combined with one or more other such documents, such combination being obvious to a person skilled in the art

"&" document member of the same patent family

Date of the actual completion of the international search

12 May, 2005 (12.05.05)

Date of mailing of the international search report

31 May, 2005 (31.05.05)

Name and mailing address of the ISA/

Japanese Patent Office

Authorized officer

Facsimile No.

Telephone No.

## A. 発明の属する分野の分類 (国際特許分類 (IPC))

Int.Cl.<sup>7</sup> G05B19/4103

## B. 調査を行った分野

調査を行った最小限資料 (国際特許分類 (IPC))

Int.Cl.<sup>7</sup> G05B19/18-19/46

最小限資料以外の資料で調査を行った分野に含まれるもの

日本国実用新案公報	1922-1996年
日本国公開実用新案公報	1971-2005年
日本国実用新案登録公報	1996-2005年
日本国登録実用新案公報	1994-2005年

国際調査で使用した電子データベース (データベースの名称、調査に使用した用語)

## C. 関連すると認められる文献

引用文献の カテゴリー*	引用文献名 及び一部の箇所が関連するときは、その関連する箇所の表示	関連する 請求の範囲の番号
X	三浦 憲二郎, 単位4元数積分曲線, 情報処理学会論文誌, 1997, 第38巻, 第11号, p. 2227-2236	1-27
X	仇 時雨, クロソイドによる自由曲線補間法, 日本ロボット学会誌, 1990, 第8巻, 第6号, p. 40-47	1-27

C欄の続きにも文献が列挙されている。

パテントファミリーに関する別紙を参照。

## \* 引用文献のカテゴリー

「A」 特に関連のある文献ではなく、一般的技術水準を示すもの  
「E」 国際出願日前の出願または特許であるが、国際出願日以後に公表されたもの  
「L」 優先権主張に疑義を提起する文献又は他の文献の発行日若しくは他の特別な理由を確立するために引用する文献 (理由を付す)  
「O」 口頭による開示、使用、展示等に言及する文献  
「P」 国際出願日前で、かつ優先権の主張の基礎となる出願

の日の後に公表された文献

「T」 国際出願日又は優先日後に公表された文献であって出願と矛盾するものではなく、発明の原理又は理論の理解のために引用するもの  
「X」 特に関連のある文献であって、当該文献のみで発明の新規性又は進歩性がないと考えられるもの  
「Y」 特に関連のある文献であって、当該文献と他の1以上の文献との、当業者にとって自明である組合せによって進歩性がないと考えられるもの  
「&」 同一パテントファミリー文献

国際調査を完了した日

12.05.2005

国際調査報告の発送日

31.5.2005

国際調査機関の名称及びあて先

日本国特許庁 (ISA/J P)

郵便番号100-8915

東京都千代田区霞が関三丁目4番3号

特許庁審査官 (権限のある職員)

二階堂 恭弘

電話番号 03-3581-1101 内線 3321

3U

3118